

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2000-08-16 kl 8.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Greger Cronquist, tel 0740 - 45 90 22 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

=====

1. Punkterna $A=(2,1,0)$, $B=(2,3,1)$, $C=(0,3,2)$ och $D=(3,3,-1)$ utgör hörnen i en tetraeder.

a) Bestäm en ekvation för planet ABC.

b) Bestäm en ekvation för normalen från D mot planet ABC.

c) Bestäm denna normals skärningspunkt med planet ABC.

d) Beräkna vinkeln mellan kanten AD och planet ABC . (8p)

2. a) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ -x \quad \quad + z + t = 2 \\ 2x - 2y + 3z + 3t = 3 \\ \quad \quad y + z + at = b \end{cases}$$

har mer än en lösning.

b) Bestäm lösningarna i detta fall.

3. Beräkna A^n , där $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ och n är ett godtyckligt naturligt tal.

4. a) F är den linjära avbildning som vrider varje vektor i xy -planet (ON-bas) vinkeln $\pi/3$ i positiv led, och därefter speglar i x -axeln. Bestäm matrisen för F .

b) Beräkna $F(\mathbf{v})$, om $\mathbf{v} = (-1, 2)$.

5. Vektorerna $\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 2, 1)$ spänner upp ett underrum U av $\mathbf{R}^4$.

a) Bestäm en ON-bas för U . (Standardskalärprodukt).

b) Vilka vektorer utgör $U^\perp$ = ortogonala komplementet till U ?

6. Antag P är en ortogonal matris med udda antal rader. Visa att om $\det P = 1$, så är $\lambda = 1$ är ett egenvärde till P

7. a) Definiera vad som menas med en *linjär avbildning* F från V till W . (V, W är linjära rum)

b) Definiera begreppen *nollrum* och *värderum* för den linjära avbildningen $F: V \rightarrow W$.

c) Formulera *dimensionssatsen* för den linjära avbildningen $F: V \rightarrow W$.

(Var god vänd!)

8. a) Bevisa att *tre* vektorer i ett linjärt rum, som spänns upp av *två* vektorer, måste vara linjärt beroende.
- b) Härled sambandet mellan matriserna A (i basen $\mathbf{e}$) och B (i basen $\mathbf{f}$) för den linjära avbildningen F , om basbytet ges av matrisen T enligt $\mathbf{f} = \mathbf{e}T$. Sambandet mellan koordinaterna X och Y i respektive bas kan antas känt och behöver inte härledas först.

/LF

SVAR

1. a) $x - y + 2z = 1$
 b) $(x, y, z) = (3, 3, -1) + t(1, -1, 2)$
 c) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$
 d) $\pi/6$
2. a) För $a = -6$, $b = 0$ har systemet oändligt många lösningar, annars 0 eller 1 lösning.
- b)
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 1 + t \\ t = t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$
3.
$$A^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^n - 6^n & -4 \cdot 3^n + 4 \cdot 6^n \\ 3^n - 6^n & -3^n + 4 \cdot 6^n \end{bmatrix}$$
4. a)
$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$
- b) $\frac{1}{2}(-1 - 2\sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$
5. a) $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 1, 2)$
- b) $t(-1, 0, 1, 0) \quad (-\infty < t < \infty)$