

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2001-03-03 kl 14.15 - 18.15

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Anna Nordqvist, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = k \end{cases}$$

a) då $k = 2$,

b) då $k = 3$ approximativt enligt minsta kvadratmetoden (visa först att lösning saknas).

2. a) Visa att linjerna $L_1: (x, y, z) = (1, -1, -1) + t(0, 1, 2)$ och

$L_2: (x, y, z) = (4, 1, 1) + t(3, 1, 0)$ har en skärningspunkt P .

b) Beräkna (den spetsiga) vinkeln mellan linjerna L_1 och L_2 . (Svara med arcusfunktion).

c) Bestäm en ekvation för det plan π som innehåller linjerna L_1 och L_2 .

d) Välj själv en punkt $Q \neq P$ på L_1 och en punkt $R \neq P$ på L_2 och beräkna arean av triangeln PQR . (8p)

3. Lös matrisekvationen $AXB - 2XB = C$,

där $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -8 & -16 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

4. Den linjära avbildningen $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ har matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en bas för $V(F)$.

b) Bestäm en ON-bas för $N(F)$.

c) Beräkna ortogonala projektionen av $(3, 0, 0, 3)$ på $N(F)$.

5. Visa att ekvationen $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xz = 1$ (ON-bas) beskriver en elliptisk cylinder, och bestäm en ekvation för dess längdaxel (dvs den symmetriaxel som är parallell med cylindern).

6. Låt $V = P_3(\mathbf{R})$ vara det linjära rummet av polynom av grad högst 3. Låt U_1 vara det underrum av V vars element uppfyller $p(1) = p(-1)$, och U_2 det underrum av U_1 där villkoret $p(1) = 0$ gäller för varje element. Bestäm först en bas för U_2 , fyll ut den till en bas för U_1 , och slutligen till en bas för hela V .

(Var god vänd!)

7. a) Definiera *inverterbarhet* och *invers* för en kvadratisk matris A .
 b) Bevisa följande sats, där $\text{typ}(A) = n \times n$ och $\text{typ}(B) = n \times 1$.
 A är inverterbar $\Leftrightarrow AX = B$ har entydig lösning för varje högerled B .
 (Du får utnyttja som ett faktum att $AC = E \Rightarrow CA = E$ när du visar implikationen åt vänster).
8. a) Visa att du känner till vilka lagar en *skalärprodukt* ska uppfylla, genom att kontrollera att
 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$ definierar en skalärprodukt på $\mathbf{R}^3$.
 ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$)
 b) Visa att man kan få en ON-bas för $\mathbf{R}^3$ med skalärprodukten i a) genom att i standardbasen byta ut $(1, 0, 0)$ mot en lämplig vektor (vilken?), men behålla $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$.

Lycka till! /LF

SVAR

1. a)
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + 5t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

2. a) Skärningspunkt $(1, 0, 1)$ b) $\arccos \frac{1}{\sqrt{50}}$ c) $2x - 6y + 3z = 5$

3.
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. a) $\text{T ex } \{(1, 2, -1)^t, (2, 1, 0)^t\}$ b) $\text{T ex } \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0)^t, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1)^t \right\}$

c) $(3, -1, 1, 2)$

5. Längdaxel: $(x, y, z) = t(-1, 0, 1)$

6. Med $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = 1 - x^2$, $e_4 = x - x^3$ är $\{e_3, e_4\}$ en bas för U_2 ,
 $\{e_1, e_3, e_4\}$ en bas för U_1 och e_1, e_2, e_3, e_4 är en bas för hela V .