

Rotationer

Beräkning av rotationsmatriser

Matematisk bakgrund:

Låt $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vara Ortsvektorn för en punkt i rummet.

Sambandet $\mathbf{r}' = M\mathbf{r}$, där

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger då en vridning av $\mathbf{r}$ en vinkel θ kring z -axeln (fig). Vi vill nu vrida en punkt kring en axel genom origo med riktningsvektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Vi gör koordinatbytet $\mathbf{r} = P\boldsymbol{\rho}$, där $P = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ väljs så att $\mathbf{c} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ där

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

(obs $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) och $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

ζ -axeln sammanfaller då med rotationsaxeln och vi får

$$\mathbf{r}' = P\boldsymbol{\rho}' = PM\boldsymbol{\rho} = PMP^t\mathbf{r}.$$

Multiplikation med $R = PMP^t$ ger således en vridning med vinkeln θ kring vektorn $\mathbf{v}$. En samtidig vridning av flera punkter $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ åstadkommes genom matrismultiplikation $R[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n] = [\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n]$.

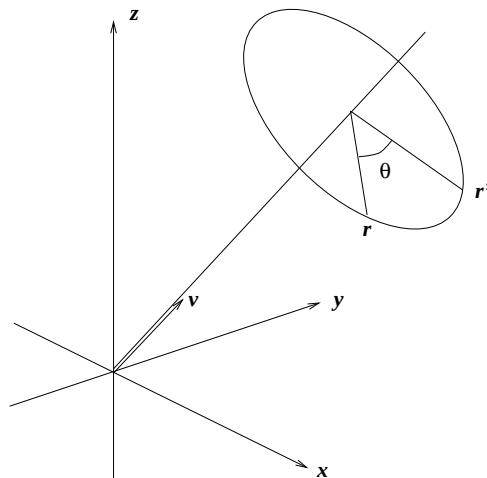
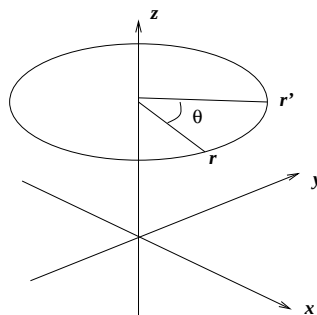
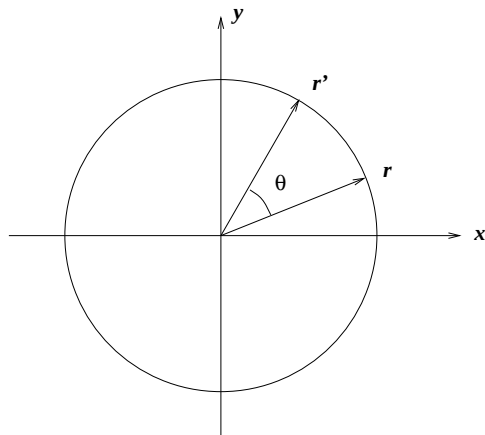
UPPGIFT: Skriv en funktionsfil

$R = \text{rotation}(\mathbf{v}, t)$

$\mathbf{v}$ är en radvektor som ger rotationsaxeln

t är en skalär som ger rotationsvinkeln.

R är den beräknade 3x3 rotationsmatrisen.



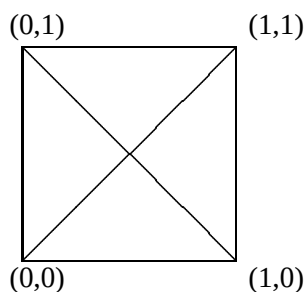
Ritning av godtyckliga figurer

Vi vill kunna rita godtyckliga plana figurer med MATLAB, exempelvis en kurva $(x(t), y(t))$ på parameterform eller en polygon. Detta kan göras genom att skapa en koordinatmatris för de punkter vi vill rita. Denna matris kan skrivas på något av följande sätt

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n]$$

$\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är då radvektorer av längd n av x- resp y-koordinaterna för punkterna, medan $\mathbf{p}_i$ är en kolonn vektor med koordinaterna för en punkt. Om vi vill rita en kurva på parameterform så väljer vi $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{bmatrix}$ för tilläckligt täta t -värden. En polygon får vi om vi låter $\mathbf{p}_i$ vara hörnen uppräknade i en lämplig ordning. Vi ritar nu figuren genom att plotta x-koordinaterna mot y-koordinaterna med kommandot
»`plot(P(1,:),P(2,:))` .

Pröva genom att rita följande figur



En roterande kub.

UPPGIFT: Skriv en funktionsfil `kub.m` som visar en roterande kub i grafikfönstret till matlab.

$y = \text{kub}(v, t)$

v är en radvektor som ger rotationsaxeln

t är vinkeln som ger hur mycket den roterar mellan varje bild.

TIPS: Programmet kan t.ex. bygga på en loop där man i varje steg vrider kuben exempelvis 1/100 varv, ritar (plottar y-koordinaterna mot x-koordinaterna i lämplig ordning) och väntar en stund. (M.h.a kommandot `pause`.)

Man startar lämpligen med att generera en rotationsmatris (använd `rotation(v,t)`) samt en matris vars kolonner är hörnpunkterna i kuben.

(Något värde på utvariabeln, y , behövs inte.)