

Vecko-PM Linjär algebra, vecka 8.

Kapitel 7.1-7.5 i Tengstrand.

Linjära avbildningar

En funktion (avbildning) F från rummet till rummet kallas *Linjär avbildning* om

- a) $F(\lambda \mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$ (homogen),
- b) $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ (additiv).

Exempel: Projektioner, speglingar, rotationer.

Matrisframställning av en linjär avbildning

Låt $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en bas för rummet. Låt A vara den 3×3 -matris vars kolonner består av komponenterna till $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3)$ med avseende på basen $\underline{e}$. (Detta kan skrivas $F(\underline{e}) = \underline{e}A$, där $F(\underline{e}) = (F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2), F(\mathbf{e}_3))$).

Om då $\mathbf{u}$ har koordinaterna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dvs $\mathbf{u} = \underline{e}X$,

och om $F(\mathbf{u})$ har koordinaterna $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, dvs $F(\mathbf{u}) = \underline{e}Y$,

så är $Y = AX$.

Volymförändring

Om A är matrisen för F i någon bas, så är $V(F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), F(\mathbf{u}_3)) = \det A \cdot V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Sammansättning

$H(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u}))$.

Om F ges av matrisen A och G av matrisen B , så ges H av matrisen AB .

Invers avbildning

Om A är matrisen för F i någon bas, så gäller:

F inverterbar $\iff F(\mathbf{u}) = 0$ endast för $\mathbf{u} = 0 \iff \det A \neq 0$. F^{-1} ges då av A^{-1} .

Nollrum, värderum, dimensionssatsen

$\dim(D(F)) = \dim(V(F)) + \dim(N(F))$

Var god vänd!

Övningar:

På tavlan (torsdag): 7.2, 10, 8, 9, 6b.

Öva själva: Repetitionsuppgiften och extrauppgifterna nedan (måndag), samt 7.3, 11, 1, 4, 5, 6ac, 12 (torsdag).

Extrauppgifter:

1) Vilka av följande avbildningar är linjära?

a) $F(\mathbf{u}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}$

b) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$

c) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{a}$

d) $F(\mathbf{u}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$

2) Antag att $F\left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $F\left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vad är då $F\left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\mathbf{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$?

3) F ges i en plan ON-bas av matrisen $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rita bilderna $F(\mathbf{e}_1)$ och $F(\mathbf{e}_2)$ av basvektorerna. Hur avbildas kvadraten med hörn i origo och $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ som sidor? Rita också bilderna av $\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$.

Repetitionsuppgift: Linjer och plan

Fyra punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:

$$P_1 = (1, 2, 1), P_2 = (-1, 1, 0), P_3 = (2, 1, -1), P_4 = (3, 0, 1).$$

a) Beräkna längden av sidan P_1P_4 .

b) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller P_1, P_2, P_3 .

c) Beräkna avståndet från P_4 till detta plan.

d) Bestäm en ekvation för räta linjen genom P_1 och P_4 , dels i parameterform, dels i parameterfri form.

e) Beräkna avståndet från P_2 till denna linje.

f) Beräkna avståndet från linjen genom P_1 och P_4 till linjen genom P_2 och P_3 .

g) Bestäm den ortogonala projektionen av punkten P_4 på planet genom P_1, P_2, P_3 .

Svar:

a) $\sqrt{8}$ b) $x - 5y + 3z + 6 = 0$ c) $12/\sqrt{35}$ d) $(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, -1, 0)$ och $x - 1 = 2 - y, z = 1$ e) $\sqrt{22}/2$ f) $6/\sqrt{11}$ g) $(93/35, 60/35, -1/35)$