

## Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2001-03-03 kl 14.15 - 18.15

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Anna Nordqvist, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

1. Lös ekvationssystemet 
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = k \end{cases}$$

a) då  $k = 2$ ,

b) då  $k = 3$  approximativt enligt minsta kvadratmetoden (visa först att lösning saknas).

2. a) Visa att linjerna  $L_1: (x, y, z) = (1, -1, -1) + t(0, 1, 2)$  och

$L_2: (x, y, z) = (4, 1, 1) + t(3, 1, 0)$  har en skärningspunkt  $P$ .

b) Beräkna (den spetsiga) vinkeln mellan linjerna  $L_1$  och  $L_2$ . (Svara med arcusfunktion).

c) Bestäm en ekvation för det plan  $\pi$  som innehåller linjerna  $L_1$  och  $L_2$ .

d) Välj själv en punkt  $Q \neq P$  på  $L_1$  och en punkt  $R \neq P$  på  $L_2$  och beräkna arean av triangeln  $PQR$ . (8p)

3. Lös matrisekvationen  $AXB - 2XB = C$ ,

där  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  och  $C = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -8 & -16 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ .

4. Den linjära avbildningen  $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  har matrisen  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

a) Bestäm en bas för  $V(F)$ .

b) Bestäm en ON-bas för  $N(F)$ .

c) Beräkna ortogonala projektionen av  $(3, 0, 0, 3)$  på  $N(F)$ .

5. Visa att ekvationen  $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6xz = 1$  (ON-bas) beskriver en elliptisk cylinder, och bestäm en ekvation för dess längdaxel (dvs den symmetriaxel som är parallell med cylindern).

6. Låt  $V = P_3(\mathbf{R})$  vara det linjära rummet av polynom av grad högst 3. Låt  $U_1$  vara det underrum av  $V$  vars element uppfyller  $p(1) = p(-1)$ , och  $U_2$  det underrum av  $U_1$  där villkoret  $p(1) = 0$  gäller för varje element. Bestäm först en bas för  $U_2$ , fyll ut den till en bas för  $U_1$ , och slutligen till en bas för hela  $V$ .

(Var god vänd!)

7. a) Definiera *inverterbarhet* och *invers* för en kvadratisk matris  $A$ .  
 b) Bevisa följande sats, där  $\text{typ}(A) = n \times n$  och  $\text{typ}(B) = n \times 1$ .  
 $A$  är inverterbar  $\Leftrightarrow AX = B$  har entydig lösning för varje högerled  $B$ .  
 (Du får utnyttja som ett faktum att  $AC = E \Rightarrow CA = E$  när du visar implikationen åt vänster).
8. a) Visa att du känner till vilka lagar en *skalärprodukt* ska uppfylla, genom att kontrollera att  
 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$  definierar en skalärprodukt på  $\mathbf{R}^3$ .  
 $(\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3))$
- b) Visa att man kan få en ON-bas för  $\mathbf{R}^3$  med skalärprodukten i a) genom att i standardbasen byta ut  $(1, 0, 0)$  mot en lämplig vektor (vilken?), men behålla  $(0, 1, 0)$  och  $(0, 0, 1)$ .

Lycka till! /LF

## SVAR

1. a) 
$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + 5t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$
2. a) Skärningspunkt  $(1, 0, 1)$       b)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{50}}$       c)  $2x - 6y + 3z = 5$
3. 
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
4. a)  $\text{T ex } \{(1, 2, -1)^t, (2, 1, 0)^t\}$       b)  $\text{T ex } \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0)^t, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1)^t \right\}$   
 c)  $(3, -1, 1, 2)$
5. Längdaxel:  $(x, y, z) = t(-1, 0, 1)$
6. Med  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = 1 - x^2, e_4 = x - x^3$  är  $\{e_3, e_4\}$  en bas för  $U_2$ ,  
 $\{e_1, e_3, e_4\}$  en bas för  $U_1$  och  $e_1, e_2, e_3, e_4$  är en bas för hela  $V$ .