

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2001-04-17 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Jonas Juel, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

- =====
1. Bestäm konstanterna a och b så att de tre planen

$x + y + 2z = -1$, $-x + y = 1$, $3x - y + az = b$ får en gemensam skärningslinje, och bestäm en ekvation för denna linje.

2. En tetraeder har hörnen

$A = (1, 1, 2)$, $B = (3, -1, -1)$, $C = (0, 3, 2)$, $D = (6, 3, -1)$ (ON-system).

a) Bestäm en ekvation för planet ABC .

b) Beräkna arean av triangeln ABC .

c) Beräkna tetraederns volym.

d) Beräkna avståndet från D till planet ABC . (8p)

3. V är det underrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$.

a) Bestäm en ON-bas för V .

b) Komplettera ON-basen för V till en ON-bas för $\mathbf{R}^4$.

4. Följande uppgift handlar om linjära avbildningar i planet. Allting är uttryckt i en ON-bas.

a) Bestäm matrisen för en spegling i linjen $(x, y) = t(2, 1)$.

b) Den linjära avbildningen F har matrisen $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$.

Visa att F är ortogonalprojektion på en viss linje, och bestäm denna linjes ekvation.

5. I ett område lever en population av sorkar och en population av ugglor. De senares byten är just sorkar. Vi antar att antalet sorkar och ugglor vid en viss tidpunkt är x_0 respektive y_0 . Vi antar vidare att följande linjära modell beskriver de båda populationernas utveckling:

$$\begin{cases} x_n = 1,4x_{n-1} - 8y_{n-1} \\ y_n = 0,04x_{n-1} + 0,2y_{n-1} \end{cases}, \quad (n \geq 1), \text{ där } x_n \text{ och } y_n \text{ är antalet sorkar respektive}$$

ugglor efter n år. Beräkna x_n och y_n för allmänt n , uttryckt i x_0 och y_0 .

Vilket blir förhållandet mellan antalet sorkar och ugglor på lång sikt, dvs då $n \rightarrow \infty$?

6. A är en $n \times n$ -matris ($n \geq 2$), vars samtliga element är ettor. Bestäm inversen till matrisen $E - A$. Ledning: Prova med en matris av typen $E + cA$, där c är ett lämpligt valt reellt tal.

Var god vänd!

7. a) Ge definitionen för att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är *linjärt beroende*.
 b) Bevisa att *tre* vektorer i ett linjärt rum, som spänns upp av *två* vektorer, måste vara linjärt beroende.
 c) Definiera *egenvektor* och *egenvärde* för en linjär avbildning.
8. Vilka av följande påståenden är sanna och vilka är falska?
 a) " $A^t A$ är symmetrisk för varje matris A ."
 b) "Om A och B är inverterbara och av samma typ, så har AB inversen $B^{-1}A^{-1}$."
 c) "Ett ekvationssystem med flera obekanta än ekvationer har alltid mer än en lösning."
 d) "Om A är kvadratisk och ekvationssystemet $AX = B$ är lösbart, så är A inverterbar."
 e) "Om A har fler kolonner än rader, så är $\det(A^t A) = 0$."
 En god motivering med ett kort bevis eller motexempel krävs till varje svar.
 (Fråga e) är lite ändrad jämfört med originalversionen, vilket också ändrar svaret!)

Lycka till! /LF

SVAR

1. $a = 2, b = -3$ ger skärningslinjen $(x, y, z) = (-1, 0, 0) + t(-1, -1, 1)$.
2. a) $6x + 3y + 2z = 13$ b) 3,5 c) 5 d) $\frac{30}{7}$
3. a) Bas: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, -1, 3)$.
 b) Lägg till basvektorn $\frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)$.
4. a) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ b) Projektionslinjen är $(x, y) = t(1, 2)$.
5.
$$\begin{cases} x_n = (2 - 0, 6^n)x_0 + (-20 + 20 \cdot 0, 6^n)y_0 \\ y_n = 0, 1(1 - 0, 6^n)x_0 + (-1 + 2 \cdot 0, 6^n)y_0 \end{cases}$$

 Om $x_0 > 10y_0$, stabiliseras populationerna (då $n \rightarrow \infty$) med 20 ggr fler sorkar än ugglor.
6. Inversen är $E - \frac{1}{n-1}A$.
8. a) Sant b) Sant c) Falskt d) Falskt e) Sant