

## Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2001-08-24 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga (ej räknedosa).

Telefon: Anna Nordqvist, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

=====

1. En tetraeder har hörnen  $A = (1, 1, 2)$ ,  $B = (2, 0, -1)$ ,  $C = (1, 3, 1)$ ,  $D = (2, -1, 1)$  (koordinater i ett ON-system).

a) Bestäm en ekvation för planet  $ABC$ .

b) Beräkna arean av triangeln  $BCD$ .

c) Beräkna avståndet från  $D$  till planet  $ABC$ .

d) Beräkna vinkeln mellan kanten  $AD$  och normalen till planet  $ABC$ .

(Får förstås anges med hjälp av en trigonometrisk funktion eller arcusfunktion). (8p)

2. Bestäm talet  $a$  så att ekvationssystemet nedan blir lösbart, och lös systemet för detta  $a$ .

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 7x_4 = a \end{cases}$$

3. Bestäm en ekvation för den rätta linje, som enligt minsta kvadratmetoden är bäst anpassad till punkterna  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 7)$ .

4. a) Vektorn  $\mathbf{u}$  speglas i ett plan med normalvektorn  $\mathbf{n}$ , där  $|\mathbf{n}| = 1$ . Uttryck den speglade vektorn  $S(\mathbf{u})$  med hjälp av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{n}$ . Rita en figur som visar alla inblandade vektorer!

b) Bestäm matrisen för en spegling i planet  $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$  (ON-bas).

5. En talföljd  $\{1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots\}$  definieras mera exakt så här:

$x_0 = x_1 = 1$ ,  $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Detta kan också uttryckas i

matrisform:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  osv,

med  $x_0 = x_1 = 1$ . (Pröva själv några steg!) Bestäm  $x_n$  som funktion av enbart  $n$ , t ex

genom att beräkna potenser av matrisen  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

6. Låt  $V$  vara mängden av alla matriser, som kommuterar med matrisen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

a) Visa att  $V$  är ett linjärt rum.

b) Bestäm en bas för  $V$ .

**Var god vänd!**

7. a)  $F:U \rightarrow V$  är en linjär avbildning,  $U$  och  $V$  är linjära rum av ändlig dimension.  
 Definiera *nollrummet*  $N(F)$  och *värderummet*  $V(F)$ .  
 b) Berätta hur man kan bestämma en bas för  $V(F)$ , om man känner matrisen för  $F$ .  
 c) Formulera *dimensionssatsen* för  $F:U \rightarrow V$ .
8. a) Definiera *ortogonal matris*.  
 b) Definiera *isometrisk avbildning* av rummet.  
 c) Visa att en avbildning av rummet, som har ortogonal matris i en ON-bas, är isometrisk.  
 d) Visa triangelolikheten i ett euklidiskt rum, utgående från Cauchy-Schwarz olikhet.

Lycka till! /LF

### SVAR

1. a)  $7x + y + 2z = 12$       b)  $\frac{\sqrt{69}}{2}$       c)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$       d)  $\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$

2. Lösbart om  $a = 11$ , med lösningarna 
$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2s + 3t \\ x_2 = 1 + s + 4t \\ x_3 = s \\ x_4 = 5t \end{cases}$$

3.  $y = 1,6x + 0,5$

4. a)  $S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}$       b)  $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

5.  $x_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

6. b) En bas utgörs av  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  och  $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ . (Man kan också ta  $E$  och  $A$ ).