

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2002-03-09 kl 14.15 - 18.15

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Walter Levy, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

1. Bestäm en ekvation i normalform ($Ax + By + Cz + D = 0$) för det plan som innehåller linjen $(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(3, 2, -6)$ och är vinkelrätt mot planet $2x + y + 3z - 5 = 0$.

2. Bestäm a så att ekvationssystemet nedan blir lösbart, och lös systemet fullständigt.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 & + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 & + 3x_4 + 3x_5 = a \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & + 3x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

3. a) Bestäm matrisen A för spegling av planets vektorer i linjen $3x_1 + x_2 = 0$,
(koordinater i en ON-bas). (6p)

b) Bestäm A^{10} och A^{11} . (Helst utan att räkna, med tanke på den låga poängen!) (2p)

4. V är det underrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna
 $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 2, -2)$ och $(5, 2, 1, -1)$.

a) Bestäm en ON-bas för V .

b) Bestäm ortogonala projektionen av $(4, -1, 2, -5)$ på V .

5. V är mängden av alla polynom $p(x)$ med reella koefficienter av grad högst 4, för vilka
 $p'(0) = 0$ och $\int_0^1 p(x) dx = 0$. Visa att V är ett linjärt rum och bestäm en bas för V .

6. a) Beräkna A^n då $A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. (6p)

b) Antag att A i uppgift a) är en s.k. *vädermatris*. För enkelhets skull delar vi upp vädret i *bra* och *dåligt*. Övre raden ger sannolikheterna för att ett bra väder ska följas av ett bra ($3/4$) respektive dåligt ($1/4$) väder nästa dag. I nedre raden står i tur och ordning sannolikheterna för att en dålig dag följs av en bra respektive dålig (alltså i detta fall lika!). Två frågor:

Hur kan man tolka matrisen A^n ? Genom att låta $n \rightarrow \infty$ i denna matris, kan man svara på hur ofta det är bra väder i ett sådant klimat. Gör det!

I b) räcker det med bara svar (utan motivering), men svaren bör vara mera bra än dåliga. (2p)

(Var god vänd!)

7. a) Definiera den vanliga *skalärprodukten* av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet. (1p)
 b) Om dessa vektorer ges med koordinater i en ON-bas, finns en enkel formel för beräkning av skalärprodukten. Ange denna formel och bevisa den.
 (Räknelagarna för skalärprodukten får användas utan att bevisas.) (3p)
 c) Skriv ortogonalprojektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Rita och förklara! (2p)
8. Besvara följande frågor:
 a) Om A är en 4×7 -matris, vilka är då de möjliga värdena på dimensionen för nollrummet respektive värderummet till A ?
 b) Samma fråga för en 7×4 -matris. (4p)

Lycka till! /LF

SVAR:

1. $12x - 21y - z + 11 = 0$

2. Lösbart bara om $a = 7$. Lösningarna är då
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - 2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = -\frac{1}{2} - t \\ x_4 = 3 + t \\ x_5 = t \end{cases}.$$

3. a) $A = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$. b) $A^{10} = E, A^{11} = A$.

4. a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, 1, -1) \right\}$. b) $(3, 2, 3, -3)$.

5. Bas för V : $\left\{ x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4}, x^4 - \frac{1}{5} \right\}$.

6. a) $A^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 4^{-n} & 1 - 4^{-n} \\ 2 - 2 \cdot 4^{-n} & 1 + 2 \cdot 4^{-n} \end{bmatrix}$. b) Bra väder $2/3$ av alla dagar på lång sikt.

8. a) $(\dim N(A), \dim V(A)) = (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ eller $(7, 0)$.
 b) $(\dim N(A), \dim V(A)) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ eller $(4, 0)$.