

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2002-04-02 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Petter Brändén, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

- =====
1. Bevisa att linjen $(x, y, z) = (0, 2, -1) + t(2, 3, 1)$ är parallell med planet $3x - y - 3z = 0$, och beräkna därefter avståndet mellan linjen och planet.
 2. Bestäm det plan $z = ax + by + c$ som är bäst anpassat till punkterna $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, -4)$ och $(1, 1, 2)$ enligt *minsta kvadratmetoden*.
 3. Bestäm vilken typ av kurva som har ekvationen $7x^2 + 6xy + 7y^2 = 2$ (ON-bas) och ta reda på vilka punkter på kurvan som har minst avstånd till origo.
 4. Bestäm avbildningsmatrisen för ortogonalprojektion på planet $x + 2y - 2z = 0$. (ON-bas i rummet).

5. Den linjära avbildningen $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ har i standardbaser matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) Bestäm en bas för $N(F)$
- b) Bestäm en bas för $V(F)$.
- c) Bestäm en ON-bas för $V(F)^\perp$ (standardskalärprodukt). (8p)

6. För reella polynom $p(x)$ och $q(x)$, definiera $(p|q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

- a) Bevisa att $(p|q)$ är en skalärprodukt i P_1 (polynom av gradtal högst 1).
- b) Bevisa att $(p|q)$ *inte* är en skalärprodukt i P_2 (polynom av gradtal högst 2).
- c) Bestäm en ON-bas för P_1 med den angivna skalärprodukten.

7. Vilka av följande påståenden är sanna och vilka är falska för linjära ekvationssystem?

- a) "Om antalet ekvationer och obekanta är lika, har systemet alltid entydig lösning".
- b) "Om systemet har entydig lösning, är alltid antalet ekvationer och obekanta lika".
- c) "Om systemet har fler obekanta än ekvationer, så finns alltid flera lösningar".
- d) "Ett homogent system med fler ekvationer än obekanta har alltid minst en lösning".
- e) "Ett homogent system med fler obekanta än ekvationer har alltid flera lösningar".
- f) "Om systemet $AX = B$ har lösningarna X_1 och X_2 , så är också $0,2X_1 + 0,8X_2$ en lösning".

Varje sant påstående skall motiveras (du får hänvisa till kända satser), och varje falskt påstående skall vederläggas med motexempel.

Var god vänd!

8. a) Vad är en *isometrisk* avbildning?
 b) Bevisa att om matrisen för den linjära avbildningen F i en ON-bas är en ortogonalmatris, så är $|F(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ för varje vektor $\mathbf{u}$.
 c) Bevisa att om A är symmetrisk, så är egenvektorer som hör till olika egenvärden ortogonala.

Lycka till! /LF

SVAR:

1. Avstånd $\frac{1}{\sqrt{19}}$
2. Planet $z = 1, 4x + 2, 8y - 3$
3. Ellips med halvaxlarna $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Punkter närmast origo: $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (avstånd $\frac{1}{\sqrt{5}}$).
4. $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
5. a) $\{(-3, -2, 1)\}$ ($\dim N(F) = 1$).
 b) $\{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 2, 2)\}$ ($\dim V(F) = 2$).
 c) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{87}}(5, -7, 3, -2)\}$ ($\dim V(F)^\perp = 2$).
6. c) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\}$
7. a, b, c falska, d, e, f sanna.