

## Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 721)

Datum: 2002-08-23 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga (ej räknedosa).

Telefon: Fredrik Altenstedt, tel 0740-459022 (minicall).

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

- =====
1. a) Bestäm en ekvation för planet som innehåller punkterna  $(0, 4, -1)$ ,  $(1, 0, -1)$  och  $(0, 0, 2)$ .

b) Beräkna avståndet från punkten  $(1, 2, 4)$  till planet i a).

2. Bestäm talen  $p$  och  $q$  så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + px_3 = q \end{cases}$$

får mer än en lösning, och ange alla lösningarna i detta fall.

3. Lös matrisekvationen  $AXB = C + XB$ , där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. a)  $F$  är den linjära avbildning som vrider varje vektor i  $xy$ -planet (ON-bas) vinkeln  $\pi/3$  i positiv led, och därefter speglar i  $x$ -axeln. Bestäm matrisen för  $F$ .

b) Beräkna  $F(\mathbf{v})$ , om  $\mathbf{v} = (-1, 2)$

5.  $V$  är det underrum till  $\mathbf{R}^4$  som genereras av vektorerna  $(1, 0, -1, 1)$ ,  $(1, 1, 2, -2)$  och  $(5, 2, 1, -1)$ .

a) Bestäm en ON-bas för  $V$ .

b) Bestäm en ON-bas för  $V^\perp$ .

6. Låt  $A$ ,  $B$  vara reella, symmetriska  $n \times n$ -matriser som har samma egenvärden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Bevisa att det finns en ortogonalmatris  $Q$ , sådan att  $B = Q^t A Q$ .

7. a)  $F: U \rightarrow W$  är en linjär avbildning,  $U$  och  $W$  är linjära rum av ändlig dimension.

Definiera nollrummet  $N(F)$  och värderummet  $V(F)$ .

b) Formulera *dimensionssatsen* för den linjära avbildningen  $F$  i deluppgift a).

c) Definiera *egenvektor* till en linjär avbildning (eller till en matris).

d) Bevisa att  $\lambda$  är ett egenvärde till matrisen  $A$  om och endast om  $\lambda$  är lösning till sekularekvationen  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

(8p)

**Var god vänd!**

8. a) Härled sambandet mellan matriserna  $A$  (i basen  $\mathbf{e}$ ) och  $B$  (i basen  $\mathbf{f}$ ) för den linjära avbildningen  $F$ , om basbytet ges av matrisen  $T$  enligt  $\mathbf{f} = \mathbf{e}T$ . Sambandet mellan koordinaterna  $X$  och  $Y$  i respektive bas kan antas känt och behöver inte härledas först.  
 b) Visa triangelolikheten i ett euklidiskt rum, utgående från Cauchy-Schwarz olikhet.

Lycka till! /LF

**SVAR:**

1. a)  $12x + 3y + 4z = 8$ .      b) 2.

2.  $p = 14$  och  $q = 8$ . Lösningarna är då 
$$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = -1 + 5t \\ x_3 = 3t \end{cases}.$$

3.  $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

4. a)  $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$

b)  $\frac{1}{2}(-1 - 2\sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}).$

5. a)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, 1, -1) \right\}.$

b)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{231}}(-1, 3, 10, 11) \right\}.$