

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 722)

Datum: 2003-04-12 kl 14.15 - 18.15

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Anton Evgafov, tel 0740-459022.

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

=====

1. Punkten $A = (2, -5, 1)$ ligger i planet $x - 2y + z = 13$ (kontrollera!), den rätta linjen genom $B = (-1, 3, 0)$ och $C = (2, 0, 1)$ skär det nämnda planet i D .

a) Bestäm punkten D .

b) Beräkna arean av triangeln ABD .

c) Beräkna vinkeln mellan sträckan AC och planets normal.

d) Beräkna avståndet mellan punkten B och linjen genom A och C . (8p)

2. Bestäm den rätta linje $y = ax + b$ som är bäst anpassad till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(2, 4)$ enligt minsta kvadratmetoden.

3. a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$ är en linjärkombination av $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$, och $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vad är h ?

b) Skriv $\mathbf{v}$ som en sådan linjärkombination, där så få som möjligt av kolonnvektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ ingår.

4. Beräkna A^n för allmänt n (positivt heltal) då $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

5. F och G är två linjära avbildningar av planet (koordinater x och y i ON-bas).

F vrider varje vektor 30° i positiv led, medan G projicerar varje vektor ortogonalt på y -axeln.

a) Bestäm matriserna för F och G samt för avbildningen H , som först vrider 30° och därefter projicerar ortogonalt på y -axeln.

b) Vad är $H \begin{bmatrix} -5 \\ \sqrt{12} \end{bmatrix}$?

c) Vilka vektorer utgör *nollrummet* respektive *värderummet* till H ?

6. $P_2(\mathbb{R})$ är det linjära rummet av polynom av grad högst 2 med reella koefficienter.

U är det underrum av $P_2(\mathbb{R})$ vars polynom har nollställe i $x = 2$. Med skalärprodukten

$\langle p|q \rangle = \int_0^2 p(x)q(x)dx$ blir U ett *euklidiskt rum*. Bestäm en bas av inbördes ortogonala

vektorer (behöver ej vara normerade) för U .

(Var god vänd!)

7. a) Vad menas med att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ är *linjärt beroende*?
- b) Bevisa att $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ för varje inverterbar matris A .
- c) Bevisa att en matris inte kan ha två *olika* inverser.
- d) Bevisa att om A och B är inverterbara matriser av samma typ, så är AB inverterbar. (Vilken blir inversen?)
8. a) Definiera *skalärprodukten* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ av två vektorer i planet eller rummet.
- b) Definiera *vektorprodukten* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ av två vektorer i rummet.
- c) Med koordinater i en positivt orienterad ON-bas, kan vektorprodukten skrivas $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, \dots, \dots)$. Härled den fullständiga formeln utgående från räkneregler för vektorprodukt. (Den vanligt förekommande determinantformeln är bara en minnesregel, och får inte användas).

Lycka till! /LF

SVAR:

1. a) $(5, -3, 2)$ b) $5\sqrt{10}$ c) $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ d) $\sqrt{10}$

2. $y = \frac{13x + 11}{10}$

3. a) $h = 5$ b) $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

4. $A^n = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \cdot 6^n + 1 & -2 \cdot 6^n + 2 \\ -2 \cdot 6^n + 2 & 6^n + 4 \end{bmatrix}$

5. a) Matris för $F: \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, matris för $G: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $N(H)$ utgörs av alla vektorer $t(\sqrt{3}, -1)$, $V(H)$ alla vektorer parallella med y-axeln

6. En ortogonal bas är t ex $\left\{ x - 2, \quad x^2 - \frac{5x}{2} + 1 \right\}$.