

Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 722)

Datum: 2003-08-22 kl 8.45 - 12.45

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Richards Grzibovskis, tel 0740 - 45 90 22.

OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.

6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

=====

1. a) Bestäm en ekvation i normalform för planet genom punkterna $P_1 = (1, 0, 2)$,

$P_2 = (3, 2, 1)$ och $P_3 = (5, 1, 3)$. (ON-bas)

b) Beräkna arean av triangeln $P_1P_2P_3$.

c) Beräkna avståndet från P_3 till linjen genom P_1 och P_2 . (7p)

2. a) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ -x \quad \quad + z + t = 2 \\ 2x - 2y + 3z + 3t = 3 \\ \quad y + z + at = b \end{cases}$$

har mer än en lösning.

b) Bestäm lösningarna i detta fall.

3. Beräkna A^n , där $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ och n är ett godtyckligt naturligt tal.

4. Låt tre vektorer i $\mathbf{R}^4$ vara givna: $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 1)$

a) Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende.

b) Bestäm en ON-bas för det underrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

c) Beräkna ortogonala projektionen av $\mathbf{v}_3$ på detta underrum. (7p)

5. a) Visa att $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ är matrisen (i en ON-bas) för spegling av rummet i ett plan,

och ange en ekvation för detta plan (antas gå genom origo).

Ledning: Vilken roll spelar matrisens egenvektorer?

b) Bestäm matrisen för ortogonalprojektion på samma plan.

Denna uppgift kan lösas utan att man använder planets ekvation, och utan att man först löst uppgift a)!

6. Antag P är en ortogonal matris med udda antal rader. Visa att om $\det P = 1$, så är

$\lambda = 1$ är ett egenvärde till P

(Var god vänd!)

7. a) Definiera vad som menas med en *linjär avbildning* F från V till W . (V, W är linjära rum)
 b) Definiera begreppen *nollrum* och *värderum* för den linjära avbildningen $F: V \rightarrow W$.
 c) Formulera *dimensionssatsen* för den linjära avbildningen $F: V \rightarrow W$.
8. a) Definiera *egenvektor* till en linjär avbildning $F: V \rightarrow W$ (eller till en matris).
 b) Bevisa att λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om λ är lösning till sekularekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$.
 c) För vilka reella värden på k definierar formeln
 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + k x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$,
 en *skalärprodukt* på $\mathbf{R}^2$?

Lycka till!/LF

SVAR:

1. a) $x - 2y - 2z + 3 = 0$

b) 4,5

c) 3

2. a) $a = -6, b = 0$

b)
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 1 + t \\ t = t \end{cases}$$

3.
$$A^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^n - 6^n & -4 \cdot 3^n + 4 \cdot 6^n \\ 3^n - 6^n & -3^n + 4 \cdot 6^n \end{bmatrix}$$

4. b) $\text{Tex} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ -1 \ 0]^t, \frac{1}{\sqrt{6}} [-1 \ 2 \ -1 \ 0]^t \right\}$

b) $\frac{1}{3} [-2 \ 1 \ 1 \ 0]^t$

5. a) Plan: $x - y + 2z = 0$

b) $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. Bevisa att $\det(P - E) = 0!$