

Några räknelagar för determinanten av en 3x3-matris

De räknelagar som presenteras här, är ett par av dem som finns i bokens kap. 13, men det kan vara motiverat att ta upp dem redan i samband med kap. 8-10, eftersom sökandet efter egenvärden kräver att många *sekularekvationer* $\det(A - \lambda E) = 0$ måste lösas. Determinanten av 3x3-matrisen kan alltid beräknas med definitionen i avsnitt 5.3, eller med *Sarrus regel* i samma avsnitt. Sekularekvationens vänsterled blir då en tredjegradsekvation, i vilken man till att börja med försöker hitta en heltalsrot. Ofta kan man emellertid göra det lättare för sig genom att utnyttja de manipulationer som följer nedan. De kan leda till att man finner en faktoruppdelning av tredjegradaren under själva determinantberäkningen.

Låt A vara en 3x3-matris med kolonnvektorer u, v, w . Med beteckningar enligt avsnitt 5.3 är då $\det A = V(u, v, w)$ (*volymfunktionen*). Genom att använda sats 12 (lagar för volymfunktionen) och sats 15: $\det A^t = \det A$, får man följande lagar:

- Om man till en kolonn/rad i A adderar en multipel av en annan kolonn/rad, så har den nya matrisen samma determinant.
- Om två kolonner/rader byter plats, så byter determinanten tecken.

Den första regelns giltighet för kolonner följer av sats 12 (i), (ii) och (iv). Ex: addera en multipel av kolonn 2 till kolonn 1:

$$V(u + \lambda v, v, w) = V(u, v, w) + \lambda V(v, v, w) = V(u, v, w) + 0.$$

Den andra regeln är en uttolkning av sats 12 (iii), då den gäller för kolonner. Att sedan båda reglerna kan tillämpas också för rader, är en konsekvens av sats 15: raderna i A är ju kolonner i A^t , och dessa matriser har samma determinant.

Som demonstrationsexempel beräknar vi $\det(A - \lambda E)$, där A är matrisen i uppgift 8.7a.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 & -3 \\ 6 & -1 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Subtrahera} \\ \text{rad 2 från rad 1} \end{array} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 6 & -1 - \lambda & -3 \\ 2 & -5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ \begin{array}{l} \text{Addera kolonn 1} \\ \text{till kolonn 2} \end{array} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 5 - \lambda & -3 \\ 2 & -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Transponera} \\ \text{Byt plats på} \\ \text{kolonn 1 och 3} \end{array} = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 2 \\ 0 & 5 - \lambda & -3 \\ 0 & -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 6 & -\lambda \\ -3 & 5 - \lambda & 0 \\ 5 - \lambda & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Räkna ut enligt} \\ \text{definitionen} \end{array} = -(-\lambda) \begin{vmatrix} -3 & 5 - \lambda \\ 5 - \lambda & -3 \end{vmatrix} = \lambda(9 - (5 - \lambda)^2) = \\ &\lambda(3 - (5 - \lambda))(3 + (5 - \lambda)) = \lambda(-2 + \lambda)(8 - \lambda) \quad \text{Egenvärden: } 0, 2, 8. \end{aligned}$$