

Rotationer

Beräkning av rotationsmatriser

Matematisk bakgrund:

Låt $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vara ortsvektorn för en punkt i rummet.

Sambandet $\mathbf{r}' = M\mathbf{r}$, där

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger då en vridning av $\mathbf{r}$ en vinkel θ kring z -axeln (fig).
Vi vill nu vrida en punkt kring en axel genom origo med riktningsvektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Vi gör koordinatbytet $\mathbf{r} = P\boldsymbol{\rho}$, där $P = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ väljs så att $\mathbf{c} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ där

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

(obs $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) och $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

ζ -axeln sammanfaller då med rotationsaxeln och vi får

$$\boldsymbol{\rho}' = M\boldsymbol{\rho}$$

$$\mathbf{r}' = P\boldsymbol{\rho}' = PM\boldsymbol{\rho} = PMP^t\mathbf{r}.$$

Multiplikation med $R = PMP^t$ ger således en vridning med vinkeln θ kring vektorn $\mathbf{v}$. En samtidig vridning av flera ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ åstadkommes genom matrismultiplikation $R[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n] = [\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n]$.

eller lämna in UPPGIFT: Skriv en funktionsfil

$R = \text{rotation}(\mathbf{v}, t)$

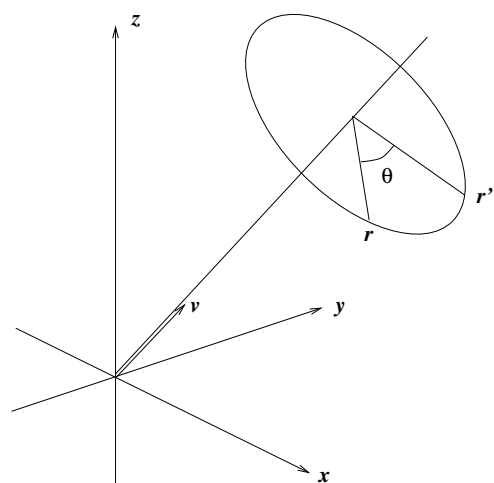
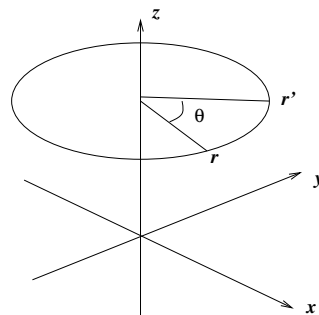
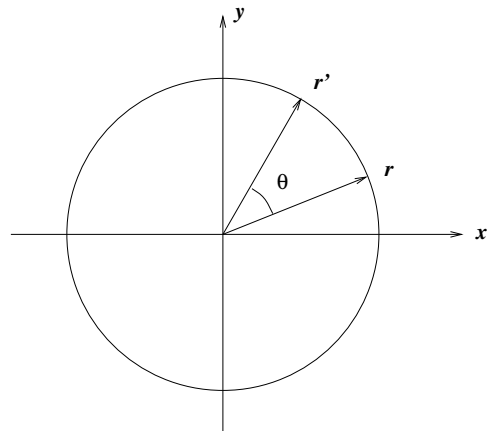
$\mathbf{v}$ är en vektor som ger rotationsaxeln

t är en skalär som ger rotationsvinkeln.

R är den beräknade 3x3 rotationsmatrisen.

Frivilligt: Om $\mathbf{v}$ är parallell med z -axeln, blir vektorn $\mathbf{u}$ enligt proceduren ovan lika med nollvektorn. Tillfoga en villkorssats som gör att programmet klarar även detta fall!

Var god vänd!



En roterande kub.

UPPGIFT: Skriv en funktionsfil *kub.m* som åstadkommer en roterande kub i grafikfönstret till matlab.

Indata:

v är en vektor som ger rotationsaxeln

t är vinkeln som ger hur mycket kuben roterar mellan varje bild.

Någon utvariabel behövs inte, filen ska ju bara åstadkomma plottning.

PLOTTNING AV 3D-OBJEKT. Det handlar om att avbilda en projektion av objektet på ett plan. Enklaste sättet att göra detta i denna uppgift, är att välja xy-planet som projektionsplan. Man plottar då punkternas x-koordinater mot y-koordinaterna (z-koordinaterna lämnas därhän). Eftersom man här kan välja rotationsaxel fritt, kan man ändå åstadkomma alla perspektiv på en roterande kub om man nöjer sig med att projicera på xy-planet. Det finns i Matlab ett 3D-plot-kommando *plot3*, men uppgiften ska lösas med vanlig 2D-plot. (Testa gärna *plot3* också). Starta med en matris vars kolonner är koordinaterna för kubens olika hörn, skrivna i sådan ordning att man kan plotta alla önskade linjer (jfr lab4!). Det visar sig då att varje hörn måste tas med minst två gånger. Rita en kub, sätt namn på hörnen och planera matrisen. Animationen blir snyggast om man låter kubens centrum ligga i origo. Programmet kan t.ex. bygga på en loop där man i varje steg vrider kuben exempelvis 1/100 varv, ritar (plotta kubmatrisens första rad mot den andra, precis som i lab 4) och ger kommandot *drawnow* eller *pause(Δt)* (se Matlab help!). För vridningen behöver man generera en rotationsmatris (använd *rotation(v,t)*). Denna enda rotationsmatris återanvänds i varje steg i loopen för att generera en ny kubmatris.

Den projektion som används här, innebär att linjer som är parallella också ser parallella ut i projektionen. I verkligheten ser man dock parallella linjer konvergera mot en punkt långt borta (t ex skenorna på ett järnvägsspår). Betraktar man kuben på lite håll, så påverkas parallelliteten ganska lite. Det ser alltså någorlunda realistiskt ut, om man tänker sig att kuben inte befinner sig alltför nära ögat. Däremot kan det vara svårt att se vad som är fram och bak på kuben, och en vanlig synvilla är att den plötsligt byter rotationsriktning. Detta kan avhjälpas genom att man märker en av kubens sidor, t ex genom att rita ut diagonalerna i den sidan. (Vill man åstadkomma nyss nämnda projektion med konvergerande linjer, kan detta åstadkommas med sk homogena koordinater. Man arbetar då i 4 dimensioner och med 4×4 -matriser).

Redovisning.

Visa upp filerna *rotation.m* och *kub.m* och demonstrera den roterande kuben på skärmen. Om redovisning inte görs vid handledningstillfället, ska denna demonstration ändå göras vid ett lämpligt tillfälle.