

Linjär Algebra Z1 (tma772)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

Notera att uppgift 4 inte skall räknas av studenter i Z1 eller av studenter som gjorde Matlab-tentan 2004-03-06.

1. Lös matrisekvationen $AXB = C$ om (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Bestäm för alla värden på a rangen till matrisen (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) I fallet $a = 2$ bestäm en bas för nollrummet $N(A)$.

3. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = ax + b$ till följande punkter $(1, 1.5)$, $(2, 8)$ och $(3, 5.5)$. (6p)

4. Se nästa sida för uppgift 4.

5. En ljusstråle går genom punkten $A = (1, 6, 3)$ och reflekteras i planet (6p)

$$\pi : 3x + y + z = 1,$$

och går sedan (efter reflektion) genom punkten $B = (3, 0, 3)$. Bestäm koordinaterna för den punkt i planet i vilken ljusstrålen reflekterades.

6. Låt A vara en ortogonalmatrix (dvs. $A^{-1} = A^t$). Visa att om $\det A = 1$ och A har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till matrisen A .

Var god vänd!

7. (a) Förklara vad som menas med att en avbildning $F : U \rightarrow V$ mellan två vektorrum är linjär. (7p)
- (b) Visa att om F är en linjär avbildning av rummet så ges F i en given bas $\underline{e}$ av en entydigt bestämd 3×3 -matris A sådan att

$$F(\underline{e}X) = \underline{e}AX \text{ för alla kolonner } X \in \mathbb{R}^3$$

- (c) Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ har (i standardbasen) matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm avbildningens matris i basen $\mathbf{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^t$

8. Formulera och bevisa *Cauchy-Shwarz* olikhet i ett Euklidiskt rum. (6p)

Följande uppgift skall ej räknas av studenter i Z1 eller studenter som gjorde Mat-labtentan 2004-03-06.

4. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$ (6p)
- (b) Bestäm matrisen A^n för godtyckligt heltal $n \geq 1$.

Lycka till!
TG