

Linjär Algebra Z1 (tma772) 2004-03-09

Svar:

1. Lös matrisekvationen $AXB = C$.

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 6 \\ 12 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

2. (a) Bestäm för alla värden på a rangen till matrisen A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4+a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{då } a \neq 2.$$

och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{då } a = 2.$$

$$\text{Alltså är } \text{rang} A = \begin{cases} 3 & \text{då } a \neq 2, 4 \\ 2 & \text{då } a = 2, \text{ eller } 4 \end{cases}$$

- (b) I fallet $a = 2$ bestäm en bas för nollrummet $N(A)$.

Vi löser ekvationen $AX = 0$. Enligt ovan (då $a = 2$) finner vi att $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Alltså är x_3 en fri variabel och man finner att lösningen $X = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

En bas för $N(A)$ är $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = ax + b$ till följande punkter $(1, 1.5)$, $(2, 8)$ och $(3, 5.5)$.

Vi löser ekvationssystemet $A^tAX = A^tY$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 8 \\ 5.5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Den utökade koefficientmatrisen för ekvationssystemet är

$$[A^tA \mid A^tY] = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 34 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså är $a = 2$ och $b = 1$ vilket innebär att den sökta linjens ekvation är $y = 2x + 1$.

5. En ljusstråle går genom punkten $A = (1, 6, 3)$ och reflekteras i planet $\pi : 3x + y + z = 1$, och går sedan (efter reflektion) genom punkten $B = (3, 0, 3)$. Bestäm koordinaterna för den punkt i planet i vilken ljusstrålen reflekterades.

Efter lite räkningar finner man att spegelbilden av punkten A i planet π ovan ges av

$$S = (1, 6, 3) - 2(3, 1, 1) = (-5, 4, 1).$$

Linjen genom punkterna S och B skär planet i den eftersökta reflektionspunkten P . En riktningsvektor är $v = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (4, -2, 1)$ och det följer efter ytterligare lite räkningar att

$$P = (3, 0, 3) - 1 \cdot (4, -2, 1) = (-1, 2, 2).$$

6. Låt A vara en ortogonalmatrix (dvs. $A^{-1} = A^t$).

Visa att om $\det A = 1$ och A har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till matrisen A .

$\lambda = 1$ är ett egenvärde till A precis då $\det(A - E) = 0$.

Här gäller att

$$\begin{aligned} \det(A - E) &= (\det A^t = \det A) = \det(A^t) \det(A - E) = \det(A^t A - A^t) = \\ &= \det(E - A^t) = \det(E - A)^t = \det(E - A) = (-1)^n \det(A - E) = -\det(A - E), \end{aligned}$$

där n = antalet rader.

Nu följer omedelbart att $2\det(A - E) = 0$ och därmed att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till A .

- 7c. Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ har (i standardbasen) matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm avbildningens matris i basen $\mathbf{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^t$.

Vi finner att

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}'_1 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}' \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{e}'_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}' \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Detta visar att matrisen för F i basen $\mathbf{e}'$ är

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ -12 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1, 3.$$

Egenvärdet $\lambda_1 = 1$ har egenvektorerna $x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och egenvärdet $\lambda_2 = 3$ har egenvektorerna $x = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

- (b) Bestäm matrisen A^n för godtyckligt heltal $n \geq 1$.

$$A^n = T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \cdot 3^n & -1 + 3^n \\ 6 - 6 \cdot 3^n & -2 + 3 \cdot 3^n \end{bmatrix}.$$