Svar till Linjär Algebra Z1 (tma772), 2004–04–13

1. (a) Två vektorer i planet är
$\mathbf{u} = (3,1,-3)-(1,2,-1) = (2,-1,-2)$ och $\mathbf{v} = (4,1,-5)-(1,2,-1) = (3,-1,-4)$.
En normal till det sökta planet är därför

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (2,2,1).$$

Ekvationen för det sökta planet är alltså: $2(x-1)+2(y-2)+(z+1)=0$.
Svar: $2x+2y+z=5$.

(b) Avståndet från punkten $P=(-3,1,4)$ till planet i a) är längden av projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (-3,1,4)-(1,2,-1) = (-4,-1,5)$ på normalvektorn $\mathbf{n}=(2,2,1)$, dvs.

$$d = \mathbf{u}_n = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{5}{3}.$$

2. Den utökade koefficientmatrisen för ekvationssytemet ges av

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 8 & b \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & -1-3a & 8-6a & b-4a \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5a+b-17 \end{bmatrix}$$

Vi finner att ekvationssystemet är lösbart om och endast om $5a+b=17$ och i dessa fall så är lösningen: $x=-5$, $y=-1$, $z=2$.

3. (a) Om $\mathbf{u} = (x,y,z)^t$ är en vektor i rummet så ges dess spegling i ett plan med normalen $\mathbf{n}$ av $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}-2\mathbf{u}_n$. Eftersom $\mathbf{n} = (2,1,-1)^t$ så är

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 2\frac{(x,y,z)\cdot(2,1,-1)}{4+1+1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -x-y+2z \\ -2x+2y+z \\ 2x+y+2z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Detta visar att avbildningsmatrisen är

$$S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom $S\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ så är -1 ett egenväde och normalvektorn $\mathbf{n}$ tillhörande egenvektor. om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer parallella med planet i a) så är $S\mathbf{u} = \mathbf{u}$ och $S\mathbf{v} = \mathbf{v}$, alltså är 1 ett dubbelt egenvärde till S.

4. Med de data som är givna så söker vi en minsta kvadratlösning till följande ekvationssystem,

$$\begin{aligned} a+2b+c &= 3 \\ -a+c &= 1 \\ a+b+c &= 1 \\ a+c &= 2 \end{aligned}$$

Minsta kvadratlösningen erhåller vi genom att lösa ekvationssystemet

$$A^tA\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^tB, \quad \text{där } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Men

$$A^tA = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^tB = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Den utökade koefficientmatrisen är

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -6 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array}\right].$$

Svar: $z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}$ eller $x + 2y - 4z - 5 = 0.$

5. För att hitta en bas av egenvektorer till matrisen A så löser vi de homogena ekvationssystemen $(A - \lambda E)X = 0$ med $\lambda = 2$ respektive $\lambda = -2$. Vi erhåller då följande bas av egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Observera att $\mathbf{v}_4$ (som hör till egenvärdet 2) är ortogonal mot $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.
Vi skapar nu en ON-bas med hjälp av Gram-Schmidts metod. Sätt

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och till sist

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{|\mathbf{f}_3|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}. \text{ Vi sätter också } \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{v}_4}{|\mathbf{v}_4|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En ON-bas av egenvektorer till A ges av: $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_4\}$

6. Ledning: Utnyttja att triangelns area är

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \times 2\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{AM}|$$

Svar: $C = \frac{1}{6}(13, 18, -22)$ eller $C = \frac{1}{6}(11, 18, -26)$

7b. Svar:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}, \quad y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$