Tentamen i matematik för Z1: Linjär algebra (TMA 722)

Datum: 2003-03-11 kl 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Christoffer Cromvik, tel 0740-459022.
OBS! Linje, antagningsår, namn och personnummer skall anges på alla inlämnade blad.
6 poäng per uppgift, där ej annat anges.

==

1. Ett plan innehåller punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$. (Positivt orienterat ON-system).
   a) Bestäm en ekvation för planet i normalform.
   b) Beräkna avståndet från punkten $(1, 3, 0)$ till planet.
   c) Bestäm den punkt i planet som har minst avstånd till $(1, 3, 0)$. (8p)

2. Lös matrisekvationen $2AX = B + 3X$, där $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

3. F är en linjär avbildning av rummet. Med koordinater i en given bas gäller:

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestäm matrisen för F i den aktuella basen.
   b) Beräkna $F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   c) Beräkna avbildningens volymskala.
   d) Är F orienteringsbevarande?

4. En linjär avbildning $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ har (i standardbaser) matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Bestäm en bas för $N(F)$ (behöver inte vara ON).
   b) Bestäm en ON-bas för $V(F)$. (Standardskalärprodukt).
   c) Beräkna ortogonala projektionen av $(1, 2, 3)$ på $V(F)$.

5. a) Diagonalisera den kvadratiska formen $4x^2 + y^2 + 4xy$ i en ON-bas, och tolka den geometriska betydelsen av ekvationen $4x^2 + y^2 + 4xy = 5$.
   b) Vilken typ av kurva representerar ekvationen $4x^2 + y^2 + 4xy + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y = 5$? (ON-system).

(Var god vänd!)

6. A är en reell symmetrisk $3x3$-matris, som har egenvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ till egenvärdet 1.

   Övriga egenvärden har belopp mindre än 1. Beräkna $\lim_{n \to \infty} A^n$!

7. a) Definiera begreppet *ortogonal matris*.
   b) Definiera begreppet *isometrisk avbildning* av rummet.
   c) Bevisa att determinanten av en ortogonal matris alltid är 1 eller -1.
   d) Visa att en avbildning av rummet, som har ortogonal matris i en ON-bas, är isometrisk.

8. Anta att det linjära ekvationssystemet $AX = B$ saknar lösning. Man kan ändå «lösa» detta ekvationssystem med *minsta kvadratmetoden*.
   a) Vad kännetecknar en sådan «lösning» ?
   b) Beskriv hur det går till att hitta denna «lösning».
   c) Förklara varför det ska gå till på detta sätt.

Lycka till! **/LF**