

Lab 6:

Lösning av differentialekvationer med Matlab

Lennart Falk

Inledning

Mera om lösning av differentialekvationer i Matlab finner du i *Pärt-Enander, Sjöberg: Användarhandledning för Matlab 6*, kapitel 11.

I Matlab finns två lösningskommandon för ordinära differentialekvationer (ODE):

`ode23` och `ode45`. De fungerar på precis samma sätt, men de använder numeriska metoder av olika ordning (se Matlab help). En ODE av första ordningen med begynnelsevillkor kan formuleras som $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Exempel: $y' = xy$, $y(0) = 1$.

Om vi vill lösa en sådan ODE med `ode23/ode45`, tillverkar vi funktionen $f(x, y)$ som *ode-fil*, t ex

```
function f=fun(x,y)
```

en funktionsfil som ska uppfylla vissa krav. Den ska ange båda variablerna x och y , även om f bara skulle bero på den ena av dem. Om vi vill lösa vår ODE på intervallet $[a, b]$ med begynnelsevillkoret $y(0) = c$, så skriver vi

```
[x,y]=ode45(@fun,[a,b],c);
```

Här är `fun` namnet på vår ode-fil. $[x, y]$ är en värdetabell för lösningen, så det är kanske intressantare att plotta lösningskurvan i stället för att titta på en diger värdetabell - därav semikolon! (Se även Matlab help för ytterligare parameter för tolerans!)

System av ODE

Vill man lösa ett *system av ODE*, så gör man detta på samma sätt, men f är då en vektorfunktion. Denna genereras av en ode-fil där f ska tillverkas som en *kolonnvektor*.

Exempel: $y_1' = 2y_1 - 3y_2$, $y_2' = -3y_1 + 2y_2$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$.

I ode-filen (vars huvud ser ut precis som förut, sånär som på namnet) skriver man *kolonnvektorn*

```
f=[2*y(1)-3*y(2);-3*y(1)+2*y(2)];
```

Matlab-lösning på intervallet $[0, 2]$ med angivna begynnelsevillkor (om ode-filen återigen heter *fun*):

```
[x,y]=ode45(@fun,[0,2],[0,1]);
```

Den tabell $[x, y]$ som erhålls, består av 3 kolonner, en för x , en för y_1 och en för y_2 . Här kan man nu välja om man vill plotta de båda lösningskurvorna (hur?) eller första kolonnen i y mot den andra (jfr föregående laborationer) om man vill se hur y_1 och y_2 är relaterade i en s.k. *faskurva*.

ODE av högre ordning

En ODE av högre ordning än ett, kan omvandlas till ett system av första ordningens ODE. Detta görs genom att man låter derivatorna utgöra nya funktionsvariabler: $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$ etc.

Exempel på en ODE av andra ordningen: $y'' = x^2 + y^2 y'$

Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$, så får vi systemet $y_1' = y_2$, $y_2' = x^2 + y_1^2 y_2$.

Uppgifter

1. Lös ODE:n $y' = 3y(1 - y)$ med Matlab. Plotta flera lösningar med olika positiva begynnelsevärden $y(0)$.

2. Volterra-Lotkas ekvationer för rovdjur/bytesdjur

$$y_1' = (1 - \frac{y_2}{50})y_1, \quad y_2' = (-1 + \frac{y_1}{200})y_2$$

Här representerar y_1 bytesdjur, t ex harar och y_2 rovdjur, t ex rävar. Låt antalet bytesdjur vid tiden noll vara betydligt större än antalet rovdjur. Prova lite olika begynnelsevillkor, plotta i något fall dels båda lösningskurvorna i samma plot, dels faskurvan i en ny plot.

3. Ekvationen för en plan pendel

$$y'' = -\frac{g}{l} \sin y - ky'.$$

Här är y pendelutslaget (radianer), g är tyngdaccelerationen ($\approx 10m/s^2$) och l är pendelns längd, $-ky'$, ($k > 0$), är en dämpningsterm. Begynnelsevärden: $y(0)$ är den vinkel som pendeln släpps ifrån, $y'(0)$ är vinkelhastigheten i detta ögonblick (som är noll om pendeln släpps från stillastående). Gör en plot av lösningskurvan och en fasplot (olika figurer).

4. Lorenz-systemet

$$x' = -ax + ay, \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz.$$

(Variabel t = tiden)

Detta system av tre ODE, en linjär och två icke-linjära, användes av Edward Lorenz för bland annat väderprognoser (1963). Lösningarna uppvisar en extrem känslighet för förändringar i begynnelsevärdena. Lös systemet med parameterintervallet $a = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, och med begynnelsepunkten $(0.001, 0, 0)$. Använd sedan kommandot `plot3` (3D-plot, se Matlab help, och undersök också hur man kan använda kommandot `view`) för att plotta faskurvan $(x(t), y(t), z(t))$. Plotta också lösningskurvan $x(t)$.

Redovisning

Visa upp eller lämna in alla ode-filer, ode23/ode45-kommandon och de plottar som begärs i respektive uppgift.