

Vecko-PM Linjär algebra, Lp3 vecka 4.

Kap 11 och avsnitt 12.1 i Tengstrand

Definition av Vektorrum (Linjärt rum) Sid 217.

$\mathbf{R}^n$, mängden av n -tupler av reella tal är ett vektorrum.

Underrum:

Om U är en delmängd av ett vektorrum V så säger vi att U är ett *Underrum* till V om

- (a) $\mathbf{0} \in U$
- (b) $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$
- (c) $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in U \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{u} \in U$

Linjärt hölje till en mängd vektorer $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$:

$[M]$ = mängden av linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. ($[M]$ *spänns upp* av M)

Linjärt beroende och oberoende:

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ säges vara *linjärt oberoende* om ekvationen (i $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

endast har den triviala lösningen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Annars säger vi att vektorerna är *linjärt beroende*.

Bas-begreppet:

$M = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kallas för en *bas* för V om $\begin{cases} M \text{ är linjärt oberoende.} \\ M \text{ spänner upp } V. \end{cases}$

Entydig koordinatframställning med avseende på en bas.

Satser

- Om V spänns upp av m st element så är fler än m element ur V linjärt beroende.
- Alla baser för V har samma antal element. Detta antal kallas för *dimensionen* av V .
- En linjärt oberoende mängd kan utvidgas till en bas.

Euklidiska rum, skalärprodukter

Exempel på skalärprodukter: $\begin{cases} \mathbf{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ C(a, b) : (f | g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{cases}$

Cauchy-Schwarts olikhet, Triangelolikheten.

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \quad \text{och} \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Övningar: På tavlan: 11: 1, 2, 9, 12: 3
Själva: 11: 3, 6, 7, 8, 12: 1, 2