Vecko–PM Linjär algebra, vecka 4.

Avsnitt 3.5, 4.3 i Tengstrand

Vektorer skrivna mha kolonnmatriser

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\boldsymbol{e}}X$$

Basbyte

Om X är koordinaterna (skrivna som kolonn-matris) för $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$, dvs

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{e}}X$$

och Y är koordinaterna för $\boldsymbol{u}$ i basen $\underline{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_3 \end{pmatrix}$, dvs

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{f}}Y$$

så är $X = TY$, där kolonnerna i T utgörs av koordinaterna för $\boldsymbol{f}_i$ i basen $\underline{\boldsymbol{e}}$, dvs

$$\boldsymbol{f}_1 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_3 = \underline{\boldsymbol{e}} \begin{bmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{bmatrix} \text{ eller kortare } \underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{e}}T.$$

Om både $\underline{\boldsymbol{e}}$ och $\underline{\boldsymbol{f}}$ är ON-baser så är T en **ortogonal** matris dvs T uppfyller

$$T^tT = E \qquad \text{(Inversen = transponatet)}$$

Övningar:

På tavlan: 4.2, 4.7, 4.9, 4.11, 3.13.
Öva själva: 3.11, 3.12, 3.14, 4.5, 4.6, 4.8, 4.9, 4.10, 4.12

Vänd!

Gruppuppgift till onsdag 26/11.

I ett ortonormerat koordinatsystem $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ i planet är följande ekvationer givna:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 = 4$

b) $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 5$

Inför nya ON-baser,

i uppgift a) $\boldsymbol{f_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$, $\boldsymbol{f_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3)$,

i uppgift b) $\boldsymbol{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\boldsymbol{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.

Låt koordinaterna i den nya basen heta u och v, dvs $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = u\boldsymbol{f}_1 + v\boldsymbol{f}_2$. Skriv upp sambandet mellan gamla och nya koordinater. Skriv sedan ekvationerna i de nya koordinaterna och tolka den geometriska betydelsen. Försök att rita gamla och nya koordinataxlar samt kurva i samma figur! (En figur för a), en för b)). De nya baserna är anpassade till geometrin hos de kurvor som beskrivs av respektive ekvation. Detta väcker förstås frågan hur man hittar "rätt" bas $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, något som behandlas senare i kursen (kapitel 9).