Matematiska Institutionen
CTH & GU

Vilhelm Adolfsson, 772 53 07, vilhelm@math.chalmers.se

Inlämningsdatum: Torsdag 6/5

Inlämningsuppgift 2 för Linjär algebra och analys, Kf1, lp IV, 1999

Obligatorisk(a) inlämningsuppgift(er):

1. I laboratoriet på godisfabriken testades en "seg råtta". Man fann att "råttans" längd var $L = 5, 6$ och 7 cm vid en applicerad sträckkraft om $F = 1, 2$ och 4 kg. Antag att Hooks lag, $L = a + bF$, gäller och finn med hjälp av minsta kvadratmetoden "råttans" normallängd, dvs "råttans" längd utan ngn applicerad kraft.

2. Låt P vara en ortogonal matris sådan att
$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \; P\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Beräkna a och b. Finn oxå matrisen för P i standardbasen, (för alla möjliga värden på a och b). Avgör oxå för varje möjligt val av (a, b) om P är en rotation eller en spegling i en linje genom origo.

3. En kvadratisk matris A kallas nilpotent om $A^k = 0$ för ngt positivt heltal k. Visa att om $A \neq 0$ är nilpotent så är A ej diagonaliserbar.

4. Låt e_1, e_2, e_3 vara standardbasen för $\mathbf{R}^3$ och låt $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -14 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. Då är $A^3 = 0$. Låt $f_1 = e_1,\ f_2 = Af_1,\ f_3 = Af_2$. Visa att f_1, f_2, f_3 är linjärt oberoende. Finn transformationsmatrisen Q för övergången till den nya basen f_1, f_2, f_3 och finn oxå matrisen A' för A i denna bas. Notera att $A' = Q^{-1}AQ$ är nedåt triangulär. Man säger att A då kan trianguleras. Med metoden beskriven här kan alltså nilpotenta matriser trianguleras, (men ej diagonaliseras enligt föregående uppgift). Man kan visa att varje (komplex) matris kan trianguleras.

Frivillig(a) inlämningsuppgift(er):

1. Låt V vara underrummet av de reellvärda, kontinuerliga funktionerna på $\mathbf{R}$, som genereras av funktionerna x, e^{2x} och xe^{3x}. Låt a, b och c vara reella tal. Beräkna determinanten av den linjära avbildningen $T : V \to V$, för vilken $T(x) = axe^{3x}$, $T(e^{2x}) = bx$ och $T(xe^{3x}) = ce^{2x}$.

2. Antag att A, B är kvadratiska $n \times n$-matriser och att B är inverterbar. Visa att då har AB och BA samma egenvärden.

3. Bestäm alla reella symmetriska matriser A som löser matrisekvationen $A^3 + A^2 + A + E = 0$, där E är enhetsmatrisen.

4. Finn den geometriska betydelsen av $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.