Matematiska Institutionen
CTH & GU

Teorifrågor, Linjär algebra och analys, Kf1, TMA 770, lp IV, 1999
(Kurs-info finns också under `http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma770/`)

Teoriuppgifter

1. Låt V vara ett linjärt rum med dimensionen $n > 0$. Visa att det finns minst en uppsättning av n linjärt oberoende vektorer i V samt att varje sådan uppsättning är en bas för V.
2. Låt V vara ett linjärt rum som genereras av vektorerna $u_1, \ldots, u_n$. Visa att varje uppsättning av fler än n vektorer i V är linjärt beroende.
3. Formulera och bevisa dimensionssatsen.
4. Låt V vara ett n-dimensionellt linjärt rum. Visa hur koordinaterna för en vektor $u \in V$ transformeras vid basbyte.
5. Formulera och bevisa Cauchy-Schwartz' olikhet.
6. Formulera och bevisa triangelolikheten.
7. Visa att varje ändligdimensionellt linjärt rum V med skalärprodukt har en ON-bas.
8. Låt U vara ett ändligdimensionellt underrum av V. Visa att det för varje $v \in V$ finns en entydigt bestämd vektor $u' \in U$ sådan att $v - u' \in U^{\perp}$. Visa också hur u' kan skrivas med hjälp av en ON-bas för U.
9. Formulera och bevisa satsen gällande minsta avståndet mellan en vektor $v \in V$ och ett underrum U av V.
10. Formulera och bevisa satsen om minsta kvadratmetoden för ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.
11. Formulera och bevisa satsen om allmänna lösningen till en linjär ekvation $F(u) = v$.
12. Låt F vara en linjär avbildning på ett n-dimensionellt linjärt rum. Visa hur matrisen för F transformeras vid basbyte.
13. Låt P vara en ortogonal $n \times n$-matris. Visa att
    - $\det P = \pm 1$,
    - $(P\vec{x}) \cdot (P\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$,
    - $\|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ för alla $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$,
    - $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow P\vec{x} \perp P\vec{y}$.
14. Formulera och bevisa satsen om hur egenvärdena till en linjär avbildning fås som rötterna till karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$.
15. Antag att $n \times n$-matrisen A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer. Visa att A är diagonaliserbar.
16. Låt A vara en $n \times n$-matris.
    - Bevisa att egenvektorer till A hörande till olika egenvärden är linjärt oberoende.
    - Bevisa att om den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ har enbart enkla rötter, så kan A diagonaliseras.

17. Låt A vara en reell symmetrisk $n \times n$-matris. Visa att alla egenvärden till A är reella, och att egenvektorerna till A kan väljas reella.

18. Låt F vara en symmetrisk linjär avbildning på ett reellt linjärt rum med skalärprodukt. Visa att egenvektorer hörande till olika egenvärden är ortogonala.

19. Formulera och bevisa spektralsatsen för symmetriska avbildningar.

20. Låt $q = \vec{x}^t A \vec{x}$ vara en kvadratisk form på $\mathbf{R}^n$. Härled diagonalformen av q, och visa att q är positivt definit om och endast om alla egenvärden till A är positiva.

21. Låt A vara en symmetrisk matris med minsta egenvärdet λ_{min} och största egenvärdet λ_{max}. Visa att
$$\lambda_{min}\|\vec{x}\|^2 \leq \vec{x}^t A \vec{x} \leq \lambda_{max}\|\vec{x}\|^2.$$
När fås likhet till vänster respektive höger i olikheten ovan? Bevisa ditt påstående.

22. Visa att det bästa approximerande trigonometriska polynomet av ordning n till en funktion f sådan att $\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx < \infty$, är partialsumman till f:s fourierserie, om man med bästa approximation menar att man gör det kvadratiska medelfelet så litet som möjligt.

23. Formulera och bevisa Bessels olikhet.