MATEMATIK	**Tentamensskrivning:**
Chalmers Tekniska Högskola	**TMA825 Serier och transformer, I2**
	TMA210 Matematik I, del E
Skriv namn och personnummer	Datum: 1998-10-24 kl 8.45-12.45
på varje inlämnat papper,dessutom	Hjälpmedel: Formelblad, typgodkänd räknare
linje och inskrivningsår på omslaget.	Telefonvakt: Niklas Broberg 772 5361

OBSERVERA att uppgifterna 2 och 5 finns i två varianter, en för dem som läser den nuvarande kursen "Serier och transformer" och en för dem som skall tenta den gamla kursen "Matematik I, del E".

Lösningar läggs in på kursens hemsida senast måndag den 26:e oktober och skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 9:e november. Lycka till!/J-E A

1. (a) Följden $\{y_n\}_0^\infty$ har z-transformen

$$Y(z) = \frac{1}{(z-4)(z-5)}$$

Bestäm y_3. (3p)

(b) Funktionen $y(t)$ satisfierar differentialekvationen

$$y'' + y = 3\sin t + \cos t$$

och $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Bestäm laplacetransformen av $y(t)$. (3p)

2. (**Serier och transformer.**) Bestäm den lösning till differensekvationen

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

som uppfyller $y_0 = 0, y_1 = 0$. (6p)

2. (**Matematik del E**.)

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (5p)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Vad är den geometriska betydelsen av (1p)

$$2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4xy = 12?$$

3. Antag att talet c uppfyller $0 < c < \pi$ och definiera en funktion $f(x)$ med perioden 2π genom att låta $f(x) = 1$ då $|x| < c$ och $f(x) = 0$ då $c \leq |x| \leq \pi$.

(a) Bestäm fourierserien för $f(x)$. (4p)

(b) Bestäm genom att sätta $x = c$ i fourierserien i (a) summan av serien (2p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nc}{n}$$

(c) Vilket resultat får man om man använder Parsevals formel på serien i (a)? (2p)

4. (a) (Teoriuppgift.) Vad menas med konvergensradien för en potensserie? (1p)
   (b) Antag att man har en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ som man vet är konvergent för $x = -2$ och divergent för $x = 2$. Vad kan man då säga om konvergens eller divergens i punkten $x = -3$? (Motivera ditt svar!) (1p)
   (c) Bestäm konvergensradien för potensserien (4p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^{2n}$$

5. (**Serier och transformer.**) Låt

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-\cos x}$$

Bevisa att det finns tal a och b så att (6p)

$$f(x) - \frac{a}{x} - b \to 0, \text{ då } x \to 0$$

5. (**Matematik del E.**) Bestäm, i form av en potensserie, den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy'' - y = 0$$

som uppfyller $y(0) = 0$,$y'(0) = 1$. (6p)

6. Bestäm exempelvis med hjälp av laplacetransform en funktion $y(t)$ som är kontinuerlig för $t \geq 0$ och som uppfyller

$$y'(t) = \begin{cases} y(t-1) & \text{då } t > 1 \\ 0 & \text{då } 0 < t < 1 \end{cases}$$

med villkoret $y(0) = 1$. Du får ge $y(t)$ i form av en serie och under räkningarnas gång utgå ifrån att alla de serier som uppkommer kan integreras termvis. (6p)

7. (Teoriuppgift)
   (a) Definiera vad som menas med att en serie är konvergent. (1p)
   (b) Bevisa att om en serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. (2p)
   (c) Ge exempel på en serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ som är divergent trots att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. (1p)
   (d) Vad säger Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier? (1p)
   (e) Ge exempel på en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent. (1p)

8. (Teoriuppgift)
   (a) Bevisa att för varje fixt tal a gäller (3p)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

   (b) Bevisa att för alla reella tal x gäller (3p)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$