MATEMATIK	**Tentamensskrivning:**
Chalmers Tekniska Högskola	**TMA825 Serier och transformer, I2**
	TMA210 Matematik I, del E
Skriv namn och personnummer	Datum: 1999-01-15 kl 8.45-12.45
på varje inlämnat papper,dessutom	Hjälpmedel: Formelblad, typgodkänd räknare
linje och inskrivningsår på omslaget.	Telefonvakt: Per Hörfelt 772 5323

OBSERVERA. Alla uppgifter är denna gång samma för nya och gamla kursen.

Lösningar läggs in på kursens hemsida senast måndag den 18:e januari och skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 22:a. Lycka till!/J-E A

1. (a) Hur definieras faltningen av två funktioner f och g ? (1p)

   (b) Låt $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = e^{-2t}$ för $t \geq 0$ och båda identiskt noll för negativa t. Använd definitionen av faltning för att bestämma faltningen av f och g. (2p)

   (c) Använd laplacetransformering för att bestämma faltningen av de båda funktionerna i (b). (3p)

2. (a) Vad menas med en taylorserie till en funktion? (1p)

   (b) Bestäm maclaurinserien till funktionen $f(x)$ definierad genom (2p)

   $$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

   (c) Bestäm $f^{(n)}(0)$ för varje naturligt tal n. (2p)

3. (a) Följden $\{y_n\}_0^\infty$ satisfierar differensekvationen

   $$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4^n \cos{(n\frac{\pi}{3})}$$

   med $y_0 = 1$,$y_1 = 2$. Bestäm talföljdens z-transform. (3p)

   (b) Antag att en talföljd $\{y_n\}_0^\infty$ har z-transformen

   $$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 2}.$$

   Bestäm y_n. (3p)

4. Låt funtionen f vara definierad på intervallet $[-1, 1]$ genom

   $$f(t) = \begin{cases} t - t^2 & \text{då } 0 \leq t \leq 1 \\ t + t^2 & \text{då } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Visa att f är en udda funktion. (2p)

   (b) Bestäm fourierserien med perioden 2 för funktionen $f(t)$. (3p)

   (c) Vilket resultat får man om man använder Parsevals formel på resultatet i (b)? (2p)

VÄND!

5. Betrakta för varje positivt reellt tal α serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^\alpha + n^2}$$

(a) För vilka α är serien absolutkonvergent? (3p)

(b) För vilka α är serien konvergent? (3p)

Motivera dina svar noga!

6. Gammafunktionen $\Gamma(x)$ definieras för positiva reella tal x genom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

och har bland annat egenskapen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. För varje positivt reellt tal p definierar vi en funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+p)}$$

för alla x sådana att serien konvergerar.

(a) För vilka x konvergerar serien? (2p)

(b) Visa att för de x där serien konvergerar gäller (4p)

$$xf'(x) = (x-p+1)f(x) + \frac{p-1}{\Gamma(p)}$$

7. (a) Bevisa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ är konvergent i en punkt $x_0 \neq 0$, så konvergerar den också för alla x med $|x| < |x_0|$. (Hjälpsatsen om potensseriers konvergens.) (5p)

(b) Ge ett exempel som visar att med förutsättningarna i (a) går det inte att dra slutsatsen att serien konvergerar även då $|x| = |x_0|$. (2p)

8. (a) Formulera och bevisa integralkriteriet för konvergens av en serie. (5p)

(b) Visa, exemplevis med tekniken från beviset i (a), att för alla positiva heltal n gäller (2p)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$