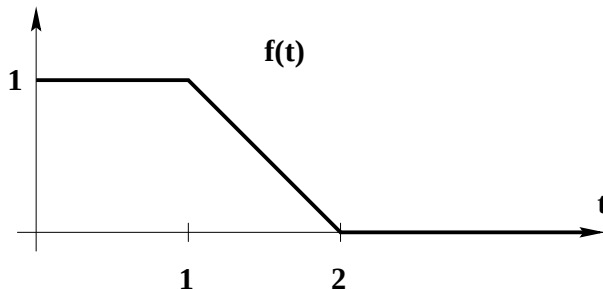


OBSERVERA. Det är bara sju uppgifter som skall göras. Uppgifterna 6 och 7 finns i två versioner, en för den nya kursen och en för den gamla.

Lösningar läggs in på kursens hemsida senast den 23:e augusti och skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 27:e augusti. Lycka till!/J-E A

1. (a) Hur definieras z -transformen av en talföljd. (1p)
(b) Skriv upp de tre första talen i den talföljd som har z -transformen $1/(z-2)$. (2p)
(c) Bestäm z -transformen $Y(z)$ av talföljden $1, -5, 6, 0, 0, 0, \dots$ (2p)
(d) Låt $Y(z)$ vara samma som i (c) och bestäm den talföljd som har z -transformen $Y(z)/(z-2)$. (3p)
2. Låt $f(t)$ vara den funktion vars graf visas i figuren nedan.



- (a) Bestäm laplacetransformen av $f(t)$. (3p)
- (b) Bestäm laplacetransformen av den lösning till differentialekvationen

$$y''(t) + y(t) = f(t)$$

som uppfyller $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (3p)

3. (a) Låt $f(x)$ vara den funktion som uppfyller $f(x) = x + \pi$ då $-\pi < x < 0$ och $f(x) = x$ då $0 < x < \pi$. Bestäm fourierserien med period 2π till funktionen. (5p)
- (b) Låt $g(x) = e^x$ då $-\pi < x < \pi$. Man kan visa att för dess fourierserie gäller

$$g(x) \sim \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx) \right].$$

Använd detta för att beräkna de båda summorna (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

VÄND!

4. (a) Vad menas med konvergensradien för en potensserie? (2p)

(b) Bestäm konvergensradierna för potensserierna (4p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}.$$

5. (a) Vad menas med att en serie är konvergent? (2p)

(b) Vad säger jämförelsekriteriet för positiva serier? (1p)

(c) Bevisa jämförelsekriteriet i (b). (5p)

Fortsättning för Serier och transformer

6. Bestäm ett polynom $p(x)$ av så lågt gradtal som möjligt så att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - p(x)}{\sin x - x \cos x}$$

existerar som ett ändligt gränsvärde. Bestäm också detta gränsvärde. (6p)

7. (a) Utsatt för en intensiv reklamkampanj startar James i slutet av ett år ett pensions-sparande genom att betala in 10 000 kr. Han räknar sedan med att fortsättningsvis bara fylla på kontot med en inbetalning per år, men att öka det belopp han betalar in med 2 % per år. Försäkringsbolaget har utlovat att det inestående kapitalet förräntas med 10% per år. Bolaget visar honom exempel på olika belopp på hur mycket han kommer att ha efter ett antal år. Men James är lite matematiskt intresserad och vill gärna se en allmän formel som visar hur stort kapitalet är efter att han gjort sin n :e inbetalning och räntan lagts till kapitalet. I formeln bortser han från bolagets förvaltningsavgifter. Hjälp honom att ta fram en sådan formel. Motivera också hur du kommer fram till den. (5p)

(b) Följden $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, där

$$y_n = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

är lösning till en homogen differensekvation av andra ordningen. Bestäm denna ekvation. (3p)

Fortsättning för Matematik, del E

6. Lös med hjälp av potensserie differentialekvationen (6p)

$$xy'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Du behöver inte undersöka seriens konvergens.

7. (a) Hur definieras att en vektor är en egenvektor till en matris? (2p)

(b) Kan en 3×3 -matris också sakna egenvektorer? (Motivering av svaret krävs.) (2p)

(c) Bestäm för varje positivt reellt tal a den geometriska betydelsen (i planet) av (4p)

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1.$$