Formelblad för I2: Serier och transformer

läsåret 98/99

Trigonometriska formler

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin x \, \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\cos x \, \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \, \sin y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

Maclaurinserier

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \quad \text{för alla } x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \text{för alla } x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \text{för alla } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \text{för } -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \quad \text{för } -1 \le x < \le 1$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \ldots \quad \text{för } -1 < x < 1$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ (1+\epsilon_n) \ \text{ där } \epsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

z-transformer

	x_n	$X(z)$
Dämpning	$a^n x_n$	$X(\frac{z}{a})$
Fördröjning	$x_{n-k}\theta_{n-k}$	$z^{-k}X(z) \quad (k>0)$
Translation	x_{n+k}	$z^k X(z) - x_0 z^k - x_1 z^{k-1} - \ldots - x_{k-1} z \quad (k>0)$
Faltning	$x_n \star y_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k$	$X(z)Y(z)$
	δ_0	1
	1	$\frac{z}{z-1}$
	a^n	$\frac{z}{z-a}$
	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
	$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$
	$\beta^n \cos n\alpha$	$\frac{z^2 - \beta z \cos\alpha}{z^2 - 2\beta z \cos\alpha + \beta^2}$
	$\beta^n \sin n\alpha$	$\frac{\beta z \sin\alpha}{z^2 - 2\beta z \cos\alpha + \beta^2}$

Räkneregler för laplacetransformer

funktion	**transform**
$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(v)\, dv$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t, $(p > 0)$	$\frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$

Några speciella laplacetransformer

funktion	**transform**
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ där $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$
$\sinh bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
$t \sin bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t \cos bt$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\dfrac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$\dfrac{\sin bt}{t}$	$\arctan \dfrac{b}{s}$
$\dfrac{1-\cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{b^2}{s^2}\right)$
$u_a(t)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	s