

# Lösningar till Serier och transform för I2, den 24/10-98

1. (a) Vi använder att  $\frac{z}{z-a}$  är  $z$ -transformen av  $\{a^n\}_0^\infty$  vilket tillsammans med räneregeln för fördröjning leder till att  $\frac{1}{z-a}$  är transformen av  $\{x_n\}_0^\infty$  med  $x_0 = 0$  och  $x_n = a^{n-1}$  då  $n \geq 1$ .  
Partialbråksuppdelning ger

$$Y(z) = \frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-4}$$

vilket för  $n \geq 1$  ger  $y_n = 5^{n-1} - 4^{n-1}$  och speciellt

$$\textbf{Svar:} \quad y_3 = 9.$$

- (b) Vi låter  $Y(s)$  vara laplacetransformen av  $y(t)$ . Då har vi

$$y''(t) \supset s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s - 2$$

Vidare har vi ur formelbladet

$$\sin t \supset \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{och} \quad \cos t \supset \frac{s}{s^2 + 1}$$

Detta ger vid transformering av differentialekvationen

$$s^2 Y(s) - s - 2 + Y(s) = \frac{3}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

och alltså

$$\textbf{Svar:} \quad Y(s) = \frac{s+2}{s^2+1} + \frac{s+3}{(s^2+1)^2}.$$

2. Ekvationen  $y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 2^n$  har karakteristiska ekvationen  $r^2 + r - 6 = 0$ . Denna har rötterna  $r_1 = -3$  och  $r_2 = 2$ . Den allmänna lösningen  $y_n^{(h)}$  till motsvarande homogena ekvation är därför

$$y_n^{(h)} = A \cdot (-3)^n + B \cdot 2^n$$

För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen

$$y_n^{(p)} = an \cdot 2^n,$$

det räcker inte med bara  $y_n^{(p)} = a \cdot 2^n$  eftersom 2 också är rot till karakteristiska ekvationen. I differensekvationen ger detta

$$a(n+2) \cdot 2^{n+2} + a(n+1) \cdot 2^{n+1} - 6an \cdot 2^n = 2^n.$$

Efter division med  $2^n$  leder detta till

$$4a(n+2) + 2a(n+1) - 6an = 1$$

som är uppfyllt då  $a = 1/10$ . En partikulärlösning är alltså

$$y_n^{(p)} = \frac{n}{10} \cdot 2^n$$

varför den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y_n = \frac{n}{10} \cdot 2^n + A \cdot (-3)^n + B \cdot 2^n$$

Villkoret  $y_0 = 0$  svarar mot  $0 + A + B = 0$  dvs  $B = -A$ . Då leder  $y_1 = 0$  till ekvationen

$$\frac{1}{10} \cdot 2 + A \cdot (-3 - 2) = 0$$

med lösningen  $A = 1/25$ . Vi har därför följande lösning till problemet

$$\textbf{Svar:} \quad y_n = (0.1n - 0.04) \cdot 2^n + 0.04 \cdot (-3)^n.$$

3. (a) Eftersom  $f(x)$  har perioden  $2\pi$  är fourierserien av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Dessutom är  $f(x)$  jämn, så vi har  $b_n = 0$  för alla  $n$ , medan vi för  $a_n$  har

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^c \cos nx \, dx.$$

För  $n = 0$  leder detta till

$$a_0 = \frac{2c}{\pi}$$

medan vi för  $n \geq 1$  får

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin nc}{n}$$

Alltså har vi

$$\textbf{Svar:} \quad f(x) \sim \frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nc}{n} \cdot \cos nx$$

- (b) Eftersom  $f(x)$  är styckevis deriverbar får vi för  $x = c$

$$\frac{c}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nc}{n} \cdot \cos nc = \frac{f(c+) + f(c-)}{2}$$

Observera att  $2 \sin nc \cdot \cos nc = \sin 2nc$  och att  $f(c+) = 0$  medan  $f(c-) = 1$  så vi får

$$\frac{c}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nc}{n} = \frac{1}{2}$$

som ger oss

$$\textbf{Svar:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nc}{n} = \frac{\pi}{2} - c$$

- (c) Parsevals formel säger att

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

I vårt fall leder detta till

$$\frac{2c^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nc}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c 1 \, dx$$

så vi får exempelvis följande formel

$$\textbf{Svar:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nc}{n^2} = \frac{c(\pi - c)}{2}$$

4. (b) Eftersom serien är divergent då  $x = 2$  och konvergent då  $x = -2$  är konvergensradien 2. Serien är alltså divergent då  $x = -3$ .

**Svar:** Divergent.

- (c) Vi har en serie av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ där } c_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \cdot x^{2n}.$$

Vi försöker använda kvotkriteriet och ser att

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(3n+3)! \cdot (n!)^3}{(3n)! \cdot ((n+1)!)^3} \cdot x^2 = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)(n+1)} x^2 \rightarrow 3^3 x^2 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Enligt kvotkriteriet är serien alltså konvergent om  $3^3 x^2 < 1$  och divergent om  $3^3 x^2 > 1$ . Konvergensradien är därför

$$\textbf{Svar:} \quad \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

5. I uttrycket

$$f(x) - \frac{a}{x} - b = \frac{x \ln(1+x) - (a+bx)(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}$$

använder vi maclaurinutvecklingarna

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).\end{aligned}$$

Detta ger

$$f(x) - \frac{a}{x} - b = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{2}x^3 + O(x^4)}{x^3(\frac{1}{2} + O(x))} = \frac{(1 - \frac{a}{2})x^2 - \frac{1+b}{2}x^3 + O(x^4)}{x^3(\frac{1}{2} + O(x))} = \frac{(1 - \frac{a}{2}) - \frac{1+b}{2}x + O(x^2)}{x(\frac{1}{2} + O(x))}$$

Eftersom i det sista uttrycket nämnaren går mot 0 måste också täljaren göra det för att kvoten skall ha ett gränsvärde alls. Täljarens gränsvärde är  $1 - \frac{a}{2}$  så ett nödvändigt villkor är alltså att  $a = 2$ . Om  $a = 2$  får vi

$$f(x) - \frac{2}{x} - b = \frac{-\frac{1+b}{2} + O(x)}{\frac{1}{2} + O(x)} \rightarrow -(1+b) \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Vi får alltså gränsvärdet 0 om och endast  $a = 2$  och  $b = -1$

$$\textbf{Svar:} \quad a = 2, b = -1$$

6. Villkoret på funktionen  $y(t)$  kan skrivas  $y'(t) = y(t-1) \cdot H(t-1)$  med  $y(0) = 1$ . Låter vi  $Y(s)$  vara laplacetransformen av  $y(t)$  så leder dessa villkor till

$$sY(s) - 1 = e^{-s}Y(s)$$

dvs

$$Y(s) = \frac{1}{s - e^{-s}}$$

Formeln för en geometrisk summa ger oss för stora  $s$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ks}}{s^k} = \frac{1}{1 - e^{-s}/s} = \frac{s}{s - e^{-s}}$$

så

$$\frac{1}{s - e^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ks}}{s^{k+1}}$$

Vi använder nu att

$$t^k \supset \frac{k!}{s^{k+1}}$$

och att detta leder till att

$$\frac{e^{-ks}}{s^{k+1}} \subset \frac{(t-k)^k}{k!} \cdot H(t-k)$$

Vi får därför

$$\textbf{Svar:} \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^k}{k!} \cdot H(t-k)$$

2. (a) Egenvärdena  $\lambda$  är lösningarna till

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Genom utveckling efter tredje raden ser vi att detta leder till ekvationen

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(2-\lambda)-4] = 0$$

dvs

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = 0$$

som har rötterna  $\lambda = 1, 3$  och  $6$ .

För att bestämma tillhörande egenvektorer  $(x, y, z)$  löser vi i vart och ett av dessa fall ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det ger oss svaret

$$\begin{aligned} \text{egenvärdet } \lambda = 1 : & \quad \text{egenvektorer} \text{ är } t(2, 1, 0) \\ \text{egenvärdet } \lambda = 3 : & \quad \text{egenvektorer} \text{ är } t(0, 0, 1) \\ \text{egenvärdet } \lambda = 6 : & \quad \text{egenvektorer} \text{ är } t(-1, 2, 0) \end{aligned}$$

där  $t$  godtyckligt reellt tal  $\neq 0$ .

(b) Eftersom alla egenvärdena är positiva är den geometriska betydelsen en ellipsoid. Dess symmetriaxlar ligger längs linjerna genom origo med egenvektorer som riktningsvektorer och motsvarande halvaxlar är  $\sqrt{12/\lambda}$  dvs  $2\sqrt{3}$ ,  $2$  respektive  $\sqrt{2}$ .

5. Låt

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Eftersom  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  har vi  $a_0 = 0$  och  $a_1 = 1$ . Vidare får vi

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

vilket i differentialekvationen  $xy'' = y$  leder till

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Genom byte av summationsindex i vänsterledet och med hänsyn till att  $a_0 = 0$  kan detta skrivas

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

Genom identifiering av koefficienter får vi för alla  $k \geq 1$  att

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1)k}$$

Eftersom  $a_1 = 1$  leder detta till att

$$a_k = \frac{1}{k!(k-1)!}$$

Den sökta funktionen är alltså

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!(k-1)!}.$$