Lösningar till Serier och transformer för I2, den 15/1-99

1. (a) Faltningen $f \star g(t)$ definieras genom $f \star g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$.

   (b) $f \star g(t) = \int_0^t e^{-(t-u)}e^{-2u}\,du = e^{-t}\int_0^t e^{-u}\,du = e^{-t}(1-e^{-t}) = e^{-t} - e^{-2t}$

   (c) Laplacetransformen av $f \star g(t)$ är $F(s)G(s)$ där F och G är laplacetransformerna av f respektive g. Ur formelbladet har vi

$$F(s) = \frac{1}{s+1} \text{ och } G(s) = \frac{1}{s+2}$$

   Låter vi $h(t) = f \star g(t)$ så har vi alltså för transformen

$$H(s) = F(s)G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

   Här gör vi partialbråksuppdelning och får

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

   Invers transformering ger därför

$$f \star g(t) = h(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

2. (a) En serie av formen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

   (b) Vi vet att

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

   för alla u. Detta ger

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!}$$

   och eftersom

$$\int_0^x t^{2k}\,dt = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

   får vi alltså

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)2^k k!}$$

   Detta är alltså svaret.

   (c) Om en funktion har maclaurinserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ så är $a_n = \frac{f^{(n)}((0))}{n!}$. Vi har alltså $f^{(n)}(0) = n!a_n$. I vårt fall är

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^k k!} & \text{om } n = 2k+1 \end{cases}$$

   Vi har därför

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 2k \\ \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k!} & \text{om } n = 2k+1 \end{cases}$$

   Här har vi använt att $(2k+1)! = (2k+1)\cdot(2k)!$

3. (a) Låt $Y(z)$ vara den sökta z-transformen. Då gäller att $\{y_{n+1}\}$ har transformen $zY(z) - zy_0 = zY(z) - z$ medan $\{y_{n+2}\}$ har transformen $z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z) - z^2 - 2z$. Ur formelbladet får vi att

$$4^n \cos(n\frac{\pi}{3}) \text{ har transformen } \frac{z^2 - 4z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2\cdot 4z\cos\frac{\pi}{3} + 4^2} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16}$$

   När vi transformerar differensekvationen får vi därför

$$z^2Y(z) - z^2 - 2z - 5(zY(z) - z) + 6Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 4z + 16}$$

   dvs

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = z(z-3) + \frac{z(z-2)}{z^2 - 4z + 16}$$

   Eftersom $(z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ ger detta

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-3)(z^2 - 4z + 16)}$$

(b) Observera att $z^2 - 2z + 2 = z^2 - 2\beta z\cos\alpha + \beta^2$ om $\beta^2 = 2$ och $\beta\cos\alpha = 1$ dvs om $\beta = \sqrt{2}$ och $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$. Med dessa värden på α och β har vi alltså $\beta^2 = 2$ och $\beta\cos\alpha = 1$ men också $\beta\sin\alpha = 1$. Med hjälp av formelbladet har vi därför dels att

$$\frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 2} \text{ är transform av } (\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4}$$

dels att

$$\frac{z}{z^2 - 2z + 2} \text{ är transform av } (\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}$$

Genom addition ser vi att

$$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 2} \text{ är transform av } (\sqrt{2})^n (\cos n\frac{\pi}{4} + \sin n\frac{\pi}{4})$$

4. (a) Då $-1 \le t \le 0$ har vi $f(-t) = (-t) - (-t)^2 = -(t + t^2) = -f(t)$ och då $0 \le t \le 1$ har vi $f(-t) = (-t) + (-t)^2 = -t + t^2 = -(t - t^2) = -f(t)$. För alla t har vi därför $f(-t) = -f(t)$ så funktionen är udda.

(b) Eftersom funktionen är udda har den en fourierserie med bara sinustermer dvs

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi t$$

där

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(t)\sin k\pi t\,dt = 2\int_0^1 f(t)\sin k\pi t\,dt = 2\int_0^1 (t - t^2)\sin k\pi t\,dt$$

Med partiell integration får vi

$$b_k = 2\left[(t - t^2)\frac{(-\cos k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 (1 - 2t)\cos k\pi t\,dt = \frac{2}{k\pi}\int_0^1 (1 - 2t)\cos k\pi t\,dt$$

Ny partiell integration ger

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left[(1 - 2t)\frac{\sin k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^1 (-2)\sin k\pi t\,dt = \frac{4}{(k\pi)^2}\left[\frac{(-\cos k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 = \frac{4}{(k\pi)^3}(1 - \cos k\pi)$$

Detta leder till att $b_k = 0$ om k är jämnt medan $b_k = \frac{8}{(k\pi)^3}$ om k är udda. Vi har alltså

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{((2m+1)\pi)^3}\sin(2m+1)\pi t$$

(c) Med Parsevals formel får vi i detta fall

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \int_{-1}^{1} f(t)^2\,dt = 2\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

dvs

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{64}{((2m+1)\pi)^6} = 2\int_0^1 (t - t^2)^2\,dt = 2\int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4)\,dt = 2(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{1}{15}$$

Vi kan skriva detta som att

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

5. (a) Att serien är absolutkonvergent är ekvivalent med att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + n^2}$ är konvergent. Vi har olikheten

$$\frac{n}{n^\alpha + n^2} < \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ är konvergent om $\alpha - 1 > 1$ så ger jämförelsekriteriet för positiva serier att vår serie är absolukonvergent åtminstone om $\alpha > 2$. Om $\alpha \le 2$ ger olikheten ovan ingen information, men då gäller $n^\alpha \le n^2$ så vi har i stället olikheten

$$\frac{n}{n^\alpha + n^2} \ge \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent ger jämförelsekriteriet att vår serie också är divergent.

Slutsats: Serien är absolutkonvergent om och endast om $\alpha > 2$.

(b) Om serien är absolutkonvergent är den också konvergent så det som återstår att undersöka om den är betingat konvergent för några $\alpha \leq 2$. Serien är alternerande av formen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ där $b_n = \frac{n}{n^\alpha + n^2} = \frac{1}{n^{\alpha-1}+n}$ Om $\alpha = 2$ är $b_n = \frac{1}{2n}$ så följden av b_n är avtagande och går mot 0. Enligt Leibniz sats om alternerande serier är alltså vår serie konvergent om $\alpha = 2$. Vi försöker använda satsen även för $\alpha < 2$. För att se att följden av b_n är avtagande och går mot 0 behöver vi visa att $n^{\alpha-1} + n$ är växande och går mot oändligheten. Att den går mot oändligheten är klar men för att se att den är växande låter vi

$$f(x) = x^{\alpha-1} + x.$$

Då är

$$f'(x) = (\alpha - 1)x^{\alpha-2} + 1$$

Om $\alpha \geq 1$ följer att $f'(x) \geq 1 > 0$ medan om $\alpha < 1$ har vi för $x \geq 1$ att $f'(x) \geq (\alpha - 1)1^{\alpha-2} + 1 = \alpha > 0$ Ibåda fallen har vi alltså att $f'(x) > 0$ så $f(x)$ är växande. Alltså är följden b_n avtagande. Eftersom den dessutom går mot 0 då n går mot oändligheten är alltså serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergent för alla $\alpha > 0$.

Slutsats: Serien är konvergent för alla positiva α.

6. (a) Potensserien är $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ med $a_n = x^n/\Gamma(n+p)$. För att undersöka konvergensen använder vi kvotkriteriet och tittar på kvoten $|a_{n+1}/a_n|$. Genom observationen att $\Gamma(n+1+p) = (n+p)\Gamma(n+p)$ ser vi att

$$\left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = |x| \cdot \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n+1+p)} = \frac{|x|}{(n+p)} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

För varje x är alltså gränsvärdet 0 och alltså speciellt mindre än 1 så serien är konvergent för alla x.

(b)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n+p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n+p)}$$

Här gör vi byte av summationsindex $n = m + 1$ och får

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)x^m}{\Gamma(m+1+p)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+p)x^m}{\Gamma(m+1+p)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p)x^m}{\Gamma(m+1+p)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+p)x^m}{(m+p)\Gamma(m+p)} + \frac{1-p}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{\Gamma(m+1+p)} \end{aligned}$$

I det sista uttrycket är den första summan lika med $f(x)$ medan vi för den andra har då vi går tillbaka till summationsindex $n = m + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1-p}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{\Gamma(m+1+p)} &= \frac{1-p}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+p)} = \frac{1-p}{x} \left(-\frac{1}{\Gamma(p)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+p)} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{p-1}{\Gamma(p)} + \frac{1-p}{x} \cdot f(x) \end{aligned}$$

Sammantaget har vi alltså

$$f'(x) = f(x) + \frac{1-p}{x} \cdot f(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{p-1}{\Gamma(p)}$$

dvs

$$xf'(x) = (x - p + 1)f(x) + \frac{p-1}{\Gamma(p)}$$

vilket skulle bevisas.

7 (b) Exempelvis är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergent för $x = -1$ men inte för $x = 1$.

8 (b) Låt $f(x) = 1/x^2$. Då är f avtagande och för varje k får vi

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx$$

och alltså för varje $m > n$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^m \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^m = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Då vi låter $m \to \infty$ får vi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

som skulle bevisas.