Lösningar till Serier och transformer för I2, den 21/8-99

1. (a) z-transformen av en talföljd $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ är

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}.$$

(b) Funktionen $z/(z-2)$ är transform av talföljden $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$. Att dividera med z innebär framåttranslation så $1/(z-2)$ är transform av $0, 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$. De tre första talen i denna är alltså $0, 1, 2$.

(c)

$$Y(z) = 1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2} = \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2}.$$

(d) Eftersom $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ har vi

$$\frac{Y(z)}{z-2} = \frac{z-3}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2}.$$

Alltså är $Y(z)/(z-2)$ transform av följden $0, 1, -3, 0, 0, \ldots$.

2. (a) Analytiskt kan funktionen beskrivas genom att $f(t) = 1$ då $0 \le t \le 1$, $f(t) = 2 - t$ då $1 \le t \le 2$, och $f(t) = 0$ då $t > 2$. Laplacetransformen $F(s)$ för $f(t)$ är då enligt definitionen

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^1 e^{-st}\, dt + \int_1^2 (2-t) e^{-st}\, dt.$$

För den första av dessa integraler får vi direkt

$$\int_0^1 e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^1 = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

medan vi genom partiell integration för den andra får

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_1^2 (2-t) e^{-st}\, dt &= \left[(2-t)\cdot(-\tfrac{1}{s} e^{-st})\right]_1^2 + \tfrac{1}{s} \textstyle\int_1^2 (-1) e^{-st}\, dt \\
&= \left[(2-t)\cdot(-\tfrac{1}{s} e^{-st}) + \tfrac{1}{s^2} e^{-st}\right]_1^2 = \tfrac{1}{s^2} e^{-2s} + \tfrac{1}{s} e^{-s} - \tfrac{1}{s^2} e^{-s}
\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s} + (s-1) e^{-s}}{s^2} = \frac{s - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}.$$

(b) Eftersom $y(0) = 0, y'(0) = 1$ har $y''(t) + y(t)$ laplacetransformen

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = (s^2 + 1) Y(s) - 1$$

så differentialekvationen ger

$$(s^2 + 1) Y(s) - 1 = F(s)$$

dvs

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{F(s)}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s - e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(s^2+1)}.$$

3. (a) Ett sätt att förenkla räkningarna är att skriva

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + f_1(x)$$

där $f_1(x) = x + \frac{\pi}{2}$ då $-\pi < x < 0$ medan $f_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$ då $0 < x < \pi$. Då är $f_1(x)$ en udda funktion och kan framställas med hjälp av enbart sinustermer, dvs

$$f_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

där

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-(x - \frac{\pi}{2}) \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\, dx = -\frac{\cos n\pi + 1}{n} + 0.$$

Eftersom $\cos n\pi = (-1)^n$ ger detta att $b_n = 0$ om n är udda medan $b_n = -2/n$ då n är jämnt. Med $n = 2k$ har vi alltså $b_{2k} = -1/k$ och får

$$f_1(x) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k}$$

vilket leder till att den ursprungliga funktionen $f(x)$ har fourierserien

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k}$$

(b) Observera att $g(x)$ är styckvis kontinuerlig så med $x = 0$ får vi

$$\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\right] = \frac{g(0-)+g(0+)}{2} = g(0) = 1.$$

Av detta får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2}.$$

För den andra serien observerar vi att med $x = \pi$ har vi $\cos k\pi = (-1)^k$ så $(-1)^k\cos k\pi = 1$, vilket gör att vi med perodisk fortsättning av $g(x)$ får

$$\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\right] = \frac{g(\pi-)+g(\pi+)}{2} = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \cosh\pi.$$

Detta leder till

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi\cosh\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2}.$$

4. (b) Vi använder kvotkriteriet som säger att om

$$K = \lim_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$$

så är serien $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent om $K < 1$ och divergent om $K > 1$.
I den första av serierna är

$$b_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n.$$

Vi observerar att $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ och $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!$ varför

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{(2(n+1))!|x|^{n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!|x|^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)|x|}{(n+1)^2} = 2\cdot\frac{2n+1}{n+1}\cdot|x| \to 4|x|$$

då $n\to\infty$. Serien är alltså konvergent om $4|x| < 1$ och divergent om $4|x| > 1$. Den har alltså konvergensradien $1/4$.
Den andra serien kommer ju ur den första genom att x byts mot x^2 så den är konvergent om $|x|^2 < 1/4$, dvs $|x| < 1/2$ och divergent om $|x|^2 > 1/4$, dvs $|x| > 1/2$. Denna serie har alltså konvergensradien $1/2$.

5. Teori.

Fortsättning Serier och transformer

6. Vi gör maclaurinutveckling av nämnaren och ser först att

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\sin x - x\cos x &= \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^3}{2!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^5}{4!}\dots \\ &= \tfrac{2x^3}{3} + O(x^5)\end{aligned}$$

Nämnaren är alltså av storleksordningen x^3 då $x \to 0$ och då får täljaren i sin maclaurinutveckling bara innehålla termer av ordning x^3 och högre annars existerar inte det sökta gränsvärdet. Eftersom

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + O(t^4)$$

får vi

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + O(x^4)$$

är det sökta polynomet

$$p(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

och med detta polynom får vi

$$\frac{e^{2x} - p(x)}{\sin x - x\cos x} = \frac{\frac{4x^3}{3} + O(x^4)}{\frac{2x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{2 + O(x)}{1 + O(x^2)} \to 2$$

då $x \to 0$.

7. (a) Låt y_n vara beloppet efter ränta och den n:te inbetalningen. Då gäller $y_1 = 10000$. Vi studerar vad som händer från den n :e inbetalningen till den $(n+1)$:a. Genom räntan har det innestående beloppet ökat från y_n till $1.1y_n$. Vid den $(n+1)$:a inbetalningen betalar han in $1.02^n \cdot 10000$ kr. Detta ger oss därför

$$y_{n+1} = 1.1y_n + 1.02^n \cdot 10000, \text{ för } n = 1, 2, \ldots$$

Detta är en linjär differensekvation av 1:a ordningen. Motsvarande homogena ekvation har karakteristiska ekvationen $r - 1.1 = 0$ så den allmänna homogena ekvationen är $A \cdot 1.1^n$. För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n = a \cdot 1.02^n$. I ekvationen ger detta

$$a \cdot 1.02^{n+1} = 1.1 \cdot a \cdot 1.02^n + 1.02^n \cdot 10000$$

vilket efter division med 1.02^n leder till

$$1.02a = 1.1a + 10000$$

och alltså

$$a = -\frac{10000}{0.08} = -125000.$$

Den allmänna lösningen till differensekvationen är då

$$y_n = A \cdot 1.1^n - 125000 \cdot 1.02^n.$$

Med $n = 1$ ger detta

$$y_1 = 1.1A - 125000 \cdot 1.02 = 1.1A - 127500$$

Men vi skulle ha $y_1 = 10000$ så vi får $A = 137500/1.1$ och alltså formeln

$$y_n = 137500 \cdot 1.1^{n-1} - 127500 \cdot 1.02^{n-1}$$

(b) En differensekvation

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$$

har allmänna lösningen

$$y_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$$

om r_1 och r_2 är olika rötter till karakteristiska ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Det skulle i vårt fall svara mot $r_1 = 2$ och $r_2 = 5$. Motsvarande karakteristisk polynom är

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = (r-2)(r-5) = r^2 - 7r + 10$$

så den sökta differensekvationen är

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0.$$

Fortsättning Matematik del E

6. Vi ansätter

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

vilket leder till att

$$xy''(x) + y' - 2y = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Genom att i de två första serierna byta $n-1$ mot n får vi

$$xy''(x)+y'-2y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)na_{n+1}+(n+1)a_{n+1}-2a_n)x^n.$$

Alltså är $xy'' + y' - 2y = 0$ precis då

$$(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - 2a_n = 0, \text{ för alla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

dvs

$$(n+1)^2 a_{n+1} = 2a_n$$

och alltså

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{(n+1)^2},\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Eftersom $y(0) = 1$ är $a_0 = 1$ så vi får successivt

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{2a_0}{(0+1)^2} = \tfrac{2}{1^2} \\
a_2 &= \tfrac{2a_1}{(1+1)^2} = \tfrac{2^2}{1^2 \cdot 2^2} \\
a_3 &= \tfrac{2a_1}{(2+1)^2} = \tfrac{2^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \tfrac{2^3}{(3!)^2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= \tfrac{2^n}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

Detta leder till att den sökta lösningen är

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2} \cdot x^n.$$

7. (b) Nej. Karakteristiska ekvationen för en 3×3-matris är en tredjegradsekvation med reella koefficienter. En sådan ekvation har minst en reell rot och därmed har matrisen egenvektorer.

   (c) Den kvadratiska formen $x^2 + 2axy + y^2$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi bestämmer dess egenvärden genom att undersöka dess karakteristiska ekvation. Eftersom

$$\left\| \begin{matrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{matrix} \right\| = (1-\lambda)^2 - a^2$$

är den karakteristiska ekvation

$$(1-\lambda)^2 - a^2 = 0$$

med rötterna $\lambda_1 = 1 + a$ och $\lambda_2 = 1 - a$.
Om $0 < a < 1$ är båda egenvärdena positiva och olika då betyder

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1$$

en ellips. Är $a > 1$ är ett egenvärde positivt och ett negativt. Då får vi en hyperbel. Om slutligen $a = 1$ har vi

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

dvs

$$(x+y)^2 = 1.$$

Den geometriska betydelsen av detta är de två linjerna $x + y = \pm 1$.