

## Exempel på uppgifter med något annan formulering

Eftersom det är ny examinator på kursen kan man vara orolig att uppgifterna på tentan kommer att avvika mycket från den typ av uppgifter som förekommer på de utdelade gamla tentorna. Väsentligen skall jag försöka hålla mig till samma uppläggning som tidigare, men eventuellt successivt försöka smyga in lite andra typer av problem. Så vid denna tenta skulle **någon** eller **några** uppgifter kunna förekomma av nedanstående typ.

1. Antag att  $\alpha$  är ett givet tal och att vi ställer oss frågan om det finns en styckevis deriverbar funktion på intervallet  $[-\pi, \pi]$  som har fourierserien

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos kx}{k^{2\alpha}} + \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \right)$$

Med hjälp av Parsevals formel kan man få fram ett nödvändigt villkor på  $\alpha$ . Vilket är detta villkor? (Motivering krävs förstås.)

2. (a) Definiera Heavisides stegfunktion.  
(b) Skriv med hjälp av Heavisides stegfunktion funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{då } x < 1 \\ e^{-2x} & \text{då } 1 < x < 10 \\ e^{-3x} & \text{då } 10 < x \end{cases}$$

genom ett enda analytiskt uttryck.

- (c) Bestäm laplacetransformen av funktionen i (b).
3. (a) Definiera vad som menas med konvergensraden för en potensserie.  
(b) Bestäm en potensserie som är konvergent för  $x = 2$  och divergent för  $x = -2$ . (Motivering krävs förstås.)
4. Talföljden  $\{a_n\}_0^{\infty}$  definieras rekursivt genom

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}, \quad a_0 = 1$$

Undersök om talföljden är konvergent och bestäm i så fall dess gränsvärde.

5. Betrakta serien

$$e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots$$

- (a) För vilka  $x$  konvergerar serien?
- (b) Bestäm för dessa  $x$  dess summa.
6. (a) Definiera vad som menas med laplacetransformen av en funktion.  
(b) Bevisa eller motbevisa följande påstående.

"Det finns en funktion vars laplacetransform existerar på hela intervallet  $[3, \infty[$  men inte för något annat reellt tal."

7. (a) Definiera  $z$ -transformen av följden  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$   
 (b) Välj en maclaurinserie för en av de elementära matematiska funktionerna. Med hjälp av denna kan du bestämma  $z$ -transformen av en följd av tal, vilken följd får du?  
 (c) Bestäm  $z$ -transformen av talföljden  $0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots$ .  
 (d) Finns det någon talföljd som har  $z$ -transformen

$$\frac{1}{z^4 - 16} ?$$

Bestäm i så fall denna.

- (e) Samma fråga för funktionen  $z^4 - 16$ .

8. Antag att vi om en differensekvation

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = d_n$$

vet att motsvarande homogena ekvation har den allmänna lösningen  $C_1 2^n + C_2 3^n$ . Vidare antar vi att vi vet, att den lösning till den ursprungliga ekvationen som uppfyller  $y_0 = y_1 = 0$  har  $z$ -transformen

$$Y(z) = \frac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 9)}$$

Vilken är då följden  $d_n$ ?

9. För varje naturligt tal  $p$  definieras Bessels funktion,  $J_p$ , av ordning  $p$  genom

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}$$

- (a) För vilka  $x$  är serien ovan konvergent?  
 (b) Är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_2(1/k)$$

konvergent eller divergent?

10. Låt för positiva heltal  $N$  och reella tal  $t$

$$\Delta t = \frac{t}{N}$$

och betrakta differensekvationen

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} &= y_n \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Låt  $y(t, N) = y_N$  och bestäm  $\lim_{N \rightarrow \infty} y(t, N)$ .