Träningstenta 1 i Linjär algebra för V1 (TMA841)

2004 08 27 kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: , 0740-45 90 22
Obs! Ange linje och antagningsår samt namn och personnummer.

---

1. Lös matrisekvationen $AXB = C + 2XB$, där (6p)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. (a) Visa att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning om $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. och $\boldsymbol{b} = [4, 1, -5, 4]^T$

   (b) Om man i MATLAB gör kommandot
   `>> x = A\b` så får vi ändå en lösning $\boldsymbol{x} = [1, 0, 2]^T$. Ange vilket ekvationssystem $\boldsymbol{x}$ är en exakt lösning till och verifiera att det är en lösning till detta. (6p)

3. Beräkna A^n för godtyckligt heltal $n \geq 1$ om (6p)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Låt följande vektorer i $\mathbb{R}^4$ vara givna (7p)
$\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3, 4]^T,\ \mathbf{v}_2 = ([1, 1, 0, 1]^T,\ \mathbf{v}_3 = [4, 3, 2, 1]^T$och $\mathbf{v}_4 = [1, 0, 2, \lambda]^T$

   (a) För vilket eller vilka värden på parametern λ utgör vektorerna ovan *inte* en bas för $\mathbb{R}^4$?

   (b) För $\lambda = 1$, bestäm koordinaterna för $\mathbf{b} = [4, 5, 3, 1]^t$ i ovanstående bas.

5. LU-faktorisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (6p)

6. P är en ortogonalmatris (dvs P är kvadratisk med ortonormerade kolonner). Vidare är
$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$
Bestäm a, b och c. (6p)

7. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? Ge motexempel till de falska. (6p)

   (a) Ett ekvationssystem med fler obekanta än antalet ekvationer har alltid minst en lösning.

   (b) Om ett kvadratiskt ekvationssystem är lösbart så är koefficientmatrisen inverterbar.

   (c) Ett homogent ekvationssystem har alltid minst en lösning.

   (d) Ett inhomogent ekvationssystem med fler ekvationer än antalet obekanta kan aldrig ha någon lösning.

   (e) Ett homogent ekvationssystem med fler obekanta än antalet ekvationer har oändligt många lösningar.

8. Låt A vara en 3×3-matris.

   (a) Vad menas med att λ är ett egenvärde till A (3p)

   (b) Bevisa att λ är ett egenvärde till A om och endast om λ är en lösning till karaktäristiska ekvationen. (Sekularekvationen.) (4p)