MATEMATIK — **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2008-08-23 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Oscar Marmon

tel. 0762-721860

Linjär Algebra VV (tma841)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrannt och tydligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 25/8. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange en kvadratisk matris som inte är diagonaliserbar. (2p)

(c) Ange en ortogonal bas för (2p)
$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T\}$.

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

(e) Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) Lösningsmängden till ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 0$ är tre linjer i xy-planet. (2p)
Ange ekvationer för var och en av dessa.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (6p)

Matrisen A har egenvärden $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$, båda av multiplicitet 2.

Ge argument som visar att A är diagonaliserbar.

Bestäm en bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A. Ange en matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

3. Betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$: (6p)

$$\mathbf{u}_1 = [1, 2, p, 3]^T, \mathbf{u}_2 = [1, 1, 1, 1]^T, \mathbf{u}_3 = [2, 1, 0, p]^T, \mathbf{u}_4 = [3, 2, -5, 1]^T.$$

Om $p = 0$ så är $\mathbf{u}_1$ en linjärkombination av de tre övriga vektorerna. Bestäm denna linjärkombination. För vilka andra värden på p är någon av vektorerna en linjärkombination av de övriga.

4. (a) Antag att A är en 2×2-matris som har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = [1\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [-1\ 1]^T$ med egenvärdena 1 respektive 2. (2p)

Bestäm $\mathbf{x}_n$ för $n = 1, 2, \ldots$ då $\mathbf{x}_0 = [0\ 1]^T$ och $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Med samma A som i (a) betraktar vi systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = [0\ 1]^T$. (4p)

Bestäm $\mathbf{x}(t)$.

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

5. (a) Bestäm ekvationen för den linje som i minstakvadratmetodens mening anpassar bäst till punkterna (-2,-2), (-1,-1), (0,2) och (1,3). (4p)

(b) Låt (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den vektor i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{y}$. Förklara sambandet mellan dessa två deluppgifter.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är två kvadratiska matriser av samma typ, så gäller $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$ så gäller $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \mathbb{R}^5$.

(c) Om A är en matris sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^4$, så har matrisen A minst fyra kolonner.

(d) Mängden av polynom p av formen $p(t) = t^2 + at + b$ där a och b är godtyckliga reella tal bildar ett tvådimensionellt underrum till $\mathbb{P}_2$, rummet av alla polynom av grad högst två.

(e) Om A är en 3×3-matris sådan att $A^2 = I$, så gäller antingen $A = I$ eller $A = -I$.

(f) Om A är en 3×3-matris sådan att systemet $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar, så är 2 ett egenvärde till A.

7. Definiera begreppen ortogonal matris och symmetrisk matris.

Låt A vara en $n \times n$ matris och betrakta följande egenskaper hos A:

(1) A är ortogonal,

(2) A är symmetrisk,

(3) $A^2 = I$.

Bevisa att två godtyckliga egenskaper ovan alltid medför den tredje.

Lycka till!

Lösningar

1. (a) Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 + 4R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2,$$

så ändras inte determinanten, medan matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är triangulär så dess determinant är bara produkten av elementen på huvuddiagonalen, nämligen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är ett exempel. Den har bara ett egenvärde, nämligen $\lambda = 1$, och motsvarande egenrum är bara 1-dimensionellt och spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) Kalla de tre vektorerna för $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ resp. $\mathbf{v}_3$. Notera att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ redan. Därför behöver vi bara byta ut $\mathbf{v}_3$ mot

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-7}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(d) Matrisen för A i denna bas är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Då beräknar vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix},$$

som innebär att $A(2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

(e) Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$. Om vi utför radoperationen $R_1 \mapsto R_1 + R_2$ på den utökade matrisen så får vi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Koefficientmatrisen är nu på reducerad trappstegsform och variablerna x_2, x_4 och x_5 är fria. Vi får då

$$x_1 + x_4 + 3x_5 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - x_4 - 3x_5$$
$$x_3 + 2x_5 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 2x_5.$$

Därför ges lösningsmängden av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 - b - 3c \\ a \\ 1 - 2c \\ b \\ c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) Determinanten blir noll om två av de tre raderna i matrisen är identiska. Man ser direkt att detta inträffar då antingen $x = 1$, $y = 1$ eller $x = y$, som är ekvationerna för de tre linjerna i lösningsmängden. För att se att det inte finns några andra lösningar gör vi följande radoperationer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \mapsto R_2 - R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & y-1 & y^2-1 \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & y+1 \end{vmatrix} = (R_3 \mapsto R_3 - R_2)$$
$$= (x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 0 & y-x \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(y-x)$$

varav ser man att determinanten är noll om och endast om antingen $x = 1$, $y = 1$ eller $x = y$.

2. Det enklaste sättet att inse att A är diagonaliserbar är att konstatera att den är symmetrisk, ty alla symmetriska matriser är diagonaliserbara (Theorem 2, Section 7.1 i Lay). Egenvärdena till A är givna. Vi söker nu motsvarande egenvektorer.

$\lambda_{1,2} = 0$: Vi har

$$A - 0 \cdot I_3 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_{3,4} = 2$: Vi har

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A. En matris P som diagonaliserar A och motsvarande diagonalmatris D väljs nu enligt

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Sätt $p = 0$ och arbeta med den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} | & | & | & | & | \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & | & \mathbf{u}_1 \\ | & | & | & | & | \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Efter utförandet av radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - 2R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2, \quad R_3 \mapsto -\frac{1}{3}R_3,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Återsubstitution ger den entydiga lösningen för detta system, nämligen

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2},$$

som innebär att, då $p = 0$,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\left(5\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4\right).$$

(b) De fyra vektorerna är linjärt beroende om och endast om

$$\left|\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & p & 0 \\ 1 & 1 & 3 & p \end{array}\right| = 0.$$

Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - 8R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2$$

ändrar inte determinanten, men förvandlar matrisen till

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & p-9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Så determinanten är just $p(9-p)$, och vektorerna är linjärt oberoende om och endast om detta är noll, dvs om och endast om $p = 0$ eller $p = 9$.

4. För mer utförlig motivering, se avsnitt 5.6 och 5.7 i Lay. Det är givet att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a)

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = PD^nP^{-1}\mathbf{x}_0$$

(b) Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$ varför

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2. \tag{1}$$

Efter substitution i $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ vi får

$$c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 = A(c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2) = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t) \cdot 2\mathbf{v}_2$$

varav $c_1'(t) = c_1(t)$, $c_2'(t) = 2c_2(t)$ med lösningar $c_1(t) = ce^t$, $c_2(t) = de^{2t}$, c, $d \in \mathbb{R}$. Återsubstitution i (1) ger

$$\mathbf{x}(t) = ce^t\mathbf{v}_1 + de^{2t}\mathbf{v}_2$$

Om $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$ får man lätt $c = d = 1/2$ och

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Kalla de fyra givna punkterna för (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Vi söker linjen $y = kx+m$ sådan att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}^T$ är minstakvadratlösningen till ekvationssystemet som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = \frac{1}{5}(7x + 9)$.

(b) Den vektor i $\mathrm{Col}(A)$ som ligger närmast $\mathbf{y}$ är, enligt del (a),

$$A\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -2/5 \\ 7/5 \\ 16/5 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Falskt. T.ex. tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Då är $\det(A) = \det(B) = 0$, men $A + B = I_2$ så $\det(A + B) = 1$.

(b) Sant, ty $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

(c) Sant. Att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ medför att $\mathrm{Col}(A)$ har dimension 4, och då måste det uppenbarligen finnas minst 4 kolonner i A.

(d) Falskt. Nollpolynomet finns inte med.

(e) Falskt. T.ex. tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(f) Sant, per definition av begreppet *egenvärde*.

7. (a) En kvadratisk matris A sägs vara *ortogonal* om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$. En kvadratisk matris A sägs vara *symmetrisk* om $A = A^T$.

(b) Det finns tre saker att göra.

Fall 1 : Visa att (1) och (2) medför (3).

A är både ortogonal och symmetrisk så därför gäller att $A = A^T = A^{-1}$. Därmed är $I = AA^{-1} = AA^T = AA = A^2$, v.s.v..

Fall 2 : Visa att (2) och (3) medför (1).

A är symmetrisk så $A = A^T$. Att $A^2 = I$ innebär att $A = A^{-1}$. Därför måste $A^{-1} = A^T$, dvs A är ortogonal, v.s.v.

Fall 3 : Visa att (3) och (1) medför (2).

Att $A^2 = I$ medför att $A = A^{-1}$ som ovan. Att A är ortogonal innebär att $A^{-1} = A^T$. Därför härleder vi att $A = A^T$, dvs A är symmetrisk, v.s.v.