

**TMA841 Linjär algebra V**

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkänddelen) Bonuspoäng från duggor 2009 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

**Del 1: Godkänddelen**

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Invertera matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Med hjälp av dessa inverser, lös matrisekvationen (3p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en inverterbar matris  $P$  och en diagonalmatris  $D$  sådana att  $A = PDP^{-1}$ . (4p)

- (b) Lös följande system av differentialekvationer med hjälp av (a): (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

4. (a) Definiera begreppen *bas* och *ortogonalbas* för ett underrum i  $\mathbb{R}^n$ . (2p)

- (b) Låt  $\mathcal{P}$  vara det plan genom origo i  $\mathbb{R}^3$  som spänns upp av vektorerna  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$  och  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ . Bestäm en ON-bas för  $\mathcal{P}$ . (2p)

- (c) Bestäm ortogonalprojektionerna av vektorn  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}^T$  på planet  $\mathcal{P}$ . (2p)

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt  $p_1(x) = a + x - x^2$ ,  $p_2(x) = -1 + x + ax^2$ ,  $p_3(x) = a + 2x + 2x^2$  vara polynom i vektorrummet  $\mathbb{P}_2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(a) Visa att om  $a = 1$  utgör  $p_1, p_2, p_3$  en bas i  $\mathbb{P}_2$ . (2p)

(b) Ange alla  $a \in \mathbb{R}$  sådana att polynomen  $p_1, p_2, p_3$  inte är en bas i  $\mathbb{P}_2$ . (4p)

6. (a) Definiera vad menas med en linjär avbildning från ett vektorrum till ett annat vektorrum. (2p)

(b) Låt  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara en linjär avbildning med standardmatrisen  $A$ . Förklara vad det innebär för matrisen  $A$  att  $F$  är injektiv? (2p)

(c) Finns det en injektiv linjär avbildning  $F$  från  $\mathbb{R}^4$  till  $\mathbb{R}^3$ . Motivera Ditt svar. (2p)

7. Låt  $A = [a_{ij}]$  vara en  $n \times n$ -matris. Med spåret av  $A$ ,  $\text{tr}(A)$ , betecknar man summan av alla diagonalelementen hos matrisen  $A$ , dvs  $\text{tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ .

(a) Bevisa att om  $A$  och  $B$  är  $3 \times 3$ -matriser så är  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . (2p)

(b) Med hjälp av resultatet i (a) visa att om  $A$  är diagonaliserbar så är (4p)

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

där  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  är egenvärdena till  $A$ .

Lycka till!  
Lyudmila T

|            |                                |            |       |
|------------|--------------------------------|------------|-------|
| Anonym kod | TMA841 Linjär algebra V 090314 | sid.nummer | Poäng |
|------------|--------------------------------|------------|-------|

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$  (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (b) Avgör om vektorerna i  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ , är linjärt beroende. (2p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (c) Bestäm koordinaterna i standardbasen för den vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  som i basen  $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \}$  har koordinatvektorn  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$  (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

(d) Bestäm baser för kolonnrum och nollrum till matrisen  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

(e) Lös följande ekvationssystem med minstakvadrat-metoden. (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** .....

## Lösningar

1. (a) Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_3,$$

så ändras inte determinanten och matrisen förvandlas till triangulärformen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$

Då ser vi att determinanten är  $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-9) = -18$ .

- (b) Nej, det är det inte. Konstatera att matrisen i uppgift (a) har dessa fyra vektorer som sina kolonner. Eftersom matrisens determinant var skild från noll så är dess kolonner linjärt oberoende.

- (c) Per definition av koordinatvektor har vi att

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (d) Då vi utför radoperationerna

$$R_3 \mapsto R_3 + R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivoten ligger i kolonner 1 och 2 så motsvarande kolonner i den ursprungliga matrisen (låt oss kalla den för  $A$ ) utgör en bas för dess kolonnrum, dvs

$$\text{Col}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

När det gäller nollrummet så återstår det att utföra bakåtsubstitution. Variabeln  $x_3$  är fri och vi har

$$x_2 = -2x_3, \quad x_1 = -x_3,$$

så att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nollrummet är alltså 1-dimensionellt och spänns upp av  $[-1 \ -2 \ 1]^T$ .

- (e) Systemet lyder  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Kolonnerna i  $A$  är uppenbarligen linjärt oberoende och därmed har systemet en entydig minstakvadratlösning  $\hat{\mathbf{x}}$  som ges av den sedvanliga formeln  $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ . Man beräknar först

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

så att

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Då har vi att

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots \text{ mer räkning } \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Enligt Theorem 2.2.4 är

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

För  $B$  ställer vi upp den utökade matrisen  $[B|I_3]$  och utför radoperationerna

$$R_1 \mapsto R_1 - R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 2R_3.$$

Dessa förvandlar  $B$  till  $I_3$  och  $I_3$  till

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Kalla den okända matrisen för  $X$  och högerledet för  $C$ . Ekvationen lyder  $AXB = C$  och därför är  $X = A^{-1}CB^{-1}$ . Enligt (a) har vi då

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots \text{ räkning } \dots = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi måste diagonalisera  $A$ . Dess karakteristiska ekvation lyder

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

som har de två rötterna  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Näst hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 2$  : Vi har

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$\lambda_2 = 3$  : Vi har

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man ser tydligt att en egenvektor är  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Därmed har vi att  $A = PDP^{-1}$  där

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

(b) Från (a) kan vi direkt skriva ner att

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots \text{räkning} \dots = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 3e^{3t} \\ -2e^{2t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

4. (a) Låt  $W$  vara ett underrum i  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  vara vektorer i  $W$ . Dessa sägs utgöra en *bas* till  $W$  om de är linjärt oberoende och spänner upp  $W$ . De sägs utgöra en *ortogonalbas* om dessutom  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$  då  $i \neq j$ .

(b) Vi först byter ut  $\mathbf{v}_2$  mot

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \left( \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{14}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Då återstår normalisering. Vi tar

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då utgör  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  den efterlängtade ON-basen.

(c) Enligt projektnsformeln är

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathcal{P}} \mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 \\ &= \frac{28}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \left( \frac{-3}{3} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Vi kan identifiera  $\mathbb{P}_2$  med  $\mathbb{R}^3$  genom att identifiera polynomet  $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$  med kolonnvektorn  $[a_0 \ a_1 \ a_2]^T$ . Därmed kan vi ställa upp de 3 givna polynomen i en matris

$$A := \begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

Polynomen utgör en bas för  $\mathbb{P}_2$  om och endast om kolumnerna i denna matris är linjärt oberoende. Detta gäller i sin tur om och endast om matrisens determinant är skild från noll. För att beräkna determinanten kan vi utföra följande radoperationer :

$$R_1 \leftrightarrow R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + aR_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - (a-1)R_2.$$

Dessa multiplicerar determinanten med  $-1$  sammanlagt och förvandlar matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} -1 & a & 2 \\ 0 & a+1 & 4 \\ 0 & 0 & 4-a \end{bmatrix}.$$

Därför är  $\det A = -\det U = (a+1)(4-a)$ , sådan att  $\det A = 0$  då  $a = -1$  eller  $a = 4$ . Det är bara för dessa värden av  $a$  som  $p_1, p_2, p_3$  inte utgör en bas i  $\mathbb{P}_2$ .

6. (a) En avbildning  $F : V \rightarrow W$  sägs vara *linjär* om, för alla  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  och alla  $c \in \mathbb{R}$  så gäller att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2), \\ F(c\mathbf{v}_1) &= cF(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Vilken som helst translation är ett exempel på en icke-linjär avbildning i  $\mathbb{R}^2$ . Enklaste sättet att inse detta är att en linjär avbildning får inte flytta på nollvektorn, dvs origo i fallet  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Att  $A$  kallas för matrisen för  $F$  medför att  $A$  är en  $m \times n$  matris sådan att, för varje  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , gäller  $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .  $F$  är injektiv betyder att  $F(\mathbf{x}_1) = F(\mathbf{x}_2)$  om och endast om  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . Eftersom  $F$  är linjär är  $F(\mathbf{x}_1) = F(\mathbf{x}_2)$  om och endast om  $F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$  och injektivitet hos  $F$  svarar då mot att  $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = 0$  har unik lösning  $\mathbf{x} = 0$  som inträffar om och endast om  $A$  har pivotelement i varje kolonn.

(c) Nej, för en  $3 \times 4$  matris kan ha max 3 pivotelement.

7. (a) Skriv

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}.$$

Räkna fram då att (kom ihåg att vi är bara intresserade av diagonalelementen i följande matriser)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} aj + bm + cp & \cdot & \cdot \\ \cdot & dk + en + fq & \cdot \\ \cdot & \cdot & gl + ho + ir \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} ja + kd + lg & \cdot & \cdot \\ \cdot & mb + ne + oh & \cdot \\ \cdot & \cdot & pc + qf + ri \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Därmed är

$$\text{tr}(AB) = (aj + bm + cp) + (dk + en + fq) + (gl + ho + ir),$$

och

$$\text{tr}(BA) = (ja + kd + lg) + (mb + ne + oh) + (pc + qf + ri).$$

Stirrar man på dessa uttryck så ser man att de består av exakt samma nio termer, fast i olika ordningar. Därmed är  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , v.s.v.

(b) Om  $A$  är diagonaliserbar så medför det att det finns en inverterbar matris  $P$  sådan att  $A = PDP^{-1}$  där

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Notera att  $\text{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ , så det räcker att visa att  $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$ .

Sätt  $B = DP^{-1}$  sådan att  $A = PB$ . Därmed är  $\text{tr}(A) = \text{tr}(PB)$ . Men enligt (a) är  $\text{tr}(PB) = \text{tr}(BP) = \text{tr}(DP^{-1}P) = \text{tr}(D)$ , v.s.v.