

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

Datum: 100311 kl. 08.30–12.30

Telefonvakt: Ragnar Freij 0703-088304

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida måndag 15/3. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Ett granskningstillfälle kommer att anordnas, se kursens webbsida för information.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Bestäm elementet p i matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning.

- (b) Låt $p = 0$ i matrisen A . Lös med hjälp av Cramers regel x_2 ur ekvationssystemet (3p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Definiera vad som menas med ett *egenvärde* och en *egenvektor* till en $n \times n$ matris A . (2p)

- (b) Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P sådan att $A = PDP^{-1}$, där (4p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. För matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, bestäm:

- (a) rank A och en bas för Col A . (2p)

- (b) En bas för Nul A . (2p)

- (c) En ON-bas för Col A . (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på deluppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Verifiera att matrisen

(6p)

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Visa att A är standardmatrisen för ortogonalprojektion på ett visst plan genom origo; ange speciellt en ekvation för detta plan. Bestäm slutligen standardmatrisen för spegling i samma plan.

6. Visa att om ett vektorrum V har en bas med n element, så är fler än n vektorer i V linjärt beroende. Använd sedan detta för att visa att *dimensionen* av ett vektorrum är väldefinierad, dvs att alla baser för ett vektorrum innehåller lika många vektorer.

(6p)

7. Avgöra vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svar måste motiveras. Om du hävdar att ett påstående är SANT så måste du förklara varför. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du däremot hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du illustrera varför med ett exempel.

OBS! Både ett felaktigt svar och ett korrekt men helt omotiverat svar ger noll poäng.

- (a) Låt n vara ett positivt heltal. För alla $n \times n$ matriser A och B gäller att $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.

(2p)

- (b) Om A är en 3×3 matris som är radekvivalent med matrisen

(2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

så är talen 1, 2 och 3 egenvärdena till A .

- (c) Låt A vara en diagonaliserbar 3×3 matris med egenvärdena λ_1 , λ_2 och λ_3 . Då är

(2p)

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

Lycka till!
Hjalmar

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 100311	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------	------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller $F \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$,
 $F \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T$ och $F \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T$. Ange standardmatrisen för F . (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Beräkna A^{-1} , där $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Ett underrum H i $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T \right\}$. Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T$.
Visa att $\mathbf{v} \in H$ och bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (d) Bestäm den rätta linje som är bäst anpassad till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 5)$ enligt minstakvadratmetoden. (3p)

Lösning:

Svar:

- (e) Lös matrisekvationen $XA + B = X$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

Lösningar TMA841, Linjär Algebra V, 100311

1. (a) Standardmatrisen kan skrivas ner direkt och ges av

$$[F(\mathbf{e}_1) \ F(\mathbf{e}_2) \ F(\mathbf{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

- (b) Då vi utför radoperationerna

$$R_1 \mapsto R_1 + 3R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - 5R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 2R_3, \quad R_2 \mapsto -R_2$$

på den utökade matrisen $[A|I_3]$ så förvandlas den till $[I_3|A^{-1}]$, där

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Vi vill skriva $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

På vanligt sätt erhåller man lösningen $c_1 = -2$, $c_2 = 1$. Detta innebär att $\mathbf{v} \in H$ och att $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (d) Den bästa linjen har ekvationen $y = kx + m$ där

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen ges av

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}.$$

SVAR : Den bästa linjens ekvation är $y = \frac{5}{2}x + 2$.

(e) Vi har att

$$XA + B = X \Rightarrow B = X - XA = X(I_2 - A) \Rightarrow X = B(I_2 - A)^{-1},$$

förutsatt att $I_2 - A$ är inverterbar. Vi beräknar

$$(I_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och erhåller

$$X = B(I_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2,$$

så förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & p+5 \end{bmatrix}.$$

Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en icke-trivial lösning om och endast om sista raden består endast av nollor, dvs om och endast om $p = -5$.

(b) Enligt Cramers regel är

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-15} = \frac{7}{15},$$

där determinanterna kan beräknas med valfri metod.

3. (a) Se kursboken.

(b) Vi måste diagonalisera A . Dess karakteristiska ekvation är

$$-\lambda[(-1 - \lambda)(7 - \lambda) - (-15)] = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0,$$

som har de tre rötterna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Sedan hittar vi motsvarande egenvektorer.

$$\lambda_1 = 1 : \text{Vi har } A - I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ En egenvektor är } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 2 : \text{Vi har } A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ En egenvektor är}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 4: \text{ Vi har } A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ En egenvektor är } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Då har vi att $A = PDP^{-1}$, där

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Då vi utför radoperationerna

$$R_3 \mapsto R_3 + R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + 3R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - R_2$$

så erhålls den reducerade trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De två första kolonnerna i A , dvs $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, är pivotkolonner och bildar alltså bas för kolonnrummet. Speciellt är $\text{rank}(A) = 2$.

(b) Från den reducerade trappstegsformen ovan ser vi att nollrummet kan skrivas i parameterform som

$$x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs vektorn $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ utgör en bas.

(c) Låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara basvektorerna i (a). Först förvandlar vi dessa till en ortogonalbas genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{w}_2 := \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{-3}{3} \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sätt slutligen

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 := \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då utgör $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en ON-bas för $\text{Col}(A)$.

5. Låt $\mathbf{n} := [1 \ -1 \ 2]^T$. Vi kontrollerar först att $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$, dvs att $\mathbf{n}$ är egenvektor till A med egenvärde 0. Om A är standardmatrisen för ortogonalprojektion på ett plan genom origo, så måste detta plan ha normalvektor $\mathbf{n}$, och alltså ges av ekvationen $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Att A verkligen ger ortogonalprojektion på detta plan innebär att $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ för varje vektor $\mathbf{v}$ i planet. Det räcker att kontrollera detta för två linjärt oberoende vektorer i planet, t.ex. $[-2 \ 0 \ 1]^T$ och $[1 \ 1 \ 0]^T$.

Kalla speglingsmatrisen för B . Vi konstaterar att, för varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$B\mathbf{x} = \mathbf{x} + 2(A\mathbf{x} - \mathbf{x}) = 2A\mathbf{x} - \mathbf{x},$$

så

$$B = 2A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Se kursboken.

7. (a) Detta är SANT. Rangén av en matris A är dimensionen av dess kolonnrum, dvs av de vektorer som kan skrivas på formen $A\mathbf{x}$ för något $\mathbf{x}$. Men eftersom $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$ är $\text{Col}(AB) \subseteq \text{Col}(A)$, så $\dim \text{Col}(AB) \leq \dim \text{Col}(A)$.

(b) Detta är FALSKT. Om man exempelvis fördubblar tredje raden får man en matris med egenvärdena 1, 2 och 6.

Alternativt kan man konstatera att alla inverterbara 3×3 -matriser är radekvivalenta med varandra (se Sats 7 i avsnitt 2.2), så om påståendet vore sant skulle alla sådana matriser ha egenvärdena 1, 2 och 3, vilket är absurt.

(c) Detta är SANT. Att A är diagonaliserbar med dessa egenvärden innebär att det finns en inverterbar matris P sådan att $A = PDP^{-1}$ där

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Men då har vi att

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(PDP^{-1}) = (\det PD)(\det P^{-1}) = (\det P^{-1})(\det PD) = \det(P^{-1}PD) \\ &= \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$