

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 24/8. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (2p)
(b) Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}.$$

- i. Avgör för vilka värden på h vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. (2p)
ii. För varje värde på h , bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (2p)

3. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (4p)

- (b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), alla lösningar till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

4. Låt $\mathcal{P}$ vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

- (a) Bestäm en ortogonal bas för $\mathcal{P}$. (3p)

- (b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på planet $\mathcal{P}$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningssång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. • Definiera begreppet *underrum* i ett vektorrum. (6p)
- Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter och U mängden av alla polynom i $\mathbb{P}_2$ som uppfyller $p(1) = 0$.
- i. Visa att U är ett underrum i $\mathbb{P}_2$.
- ii. Bestäm en bas för U .
- Motivera väl.
6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (6p)
- Bestäm F 's egenvärden och egenvektorer, dvs egenvärdena och egenvektorerna till F 's matris i standardbas.
- Bestäm $F(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.
7. Visa att om produkten AB av två kvadratiska matriser A och B är inverterbar så är både A och B inverterbara. (6p)

Lycka till!
Hjalmar

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 100823	sid.nummer 1	Poäng
------------	--------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$, $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ är totalmatriser till tre linjära ekvationssystem. Lös dessa ekvationssystem. (3p)

Lösning:

Svar:

(b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbildar vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för F . Bestäm också bilden av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar:

(c) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

(d) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för $\mathbb{R}^2$ om $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm sedan koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i den bas $\mathcal{B}$ du hittat. (3p)

Lösning:

Svar:

(e) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

Lösningar TMA841, Linjär Algebra V, 100823

1. (a) Lösningarna kan avläsas utan räkning. För A kan vi välja x_2 fri och lösa ut $x_1 = 1 - 2x_2$, $x_3 = 1$. För B kan vi välja x_2 fri och lösa ut $x_1 = 1 - 2x_2$, $x_3 = 0$. Matrisen C svarar mot ett system utan lösning.

- (b) Vi kan direkt skriva upp standardmatrisen $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Den sökta bilden är då

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (c) Succesiv elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De två första kolonnerna är pivotkolonner. Vi kan alltså ta $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ som bas för kolonnrummet. Vi ser vidare att lösningen till det homogena systemet kan skrivas $x_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Vi kan alltså ta $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ som bas för nollrummet.

- (d) Vi ser att $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}_1$. Koordinatvektorn kan nu beräknas genom projektnsformeln; vi har

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = \frac{5}{2}.$$

Alltså är $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$.

- (e) Elimination av utökade matrisen $[A|I]$ ger

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 3/2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (a) Se kursboken.

- (b) Vi bildar en matris med de givna vektorerna som kolonner. Succesiv elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & h-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & h+5 \end{bmatrix}.$$

Då $h \neq -5$ är alla kolonner pivotkolonner. De spänner då upp hela rummet och är linjärt oberoende. Då $h = -5$ är enbart de två första kolonnerna pivotkolonner, dvs kolonnerna spänner upp ett plan och är linjärt beroende. Svaret på första delfrågan är alltså för $h = -5$, på andra delfrågan att dimensionen är 2 då $h = -5$ och 3 då $h \neq -5$.

3. (a) Vi beräknar

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 5 \\ 1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3).$$

Eigenvärdena är alltså ± 3 . Eigenvärdesekvationen $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ är ekvivalent med $-x_1 + 5x_2 = 0$, eller med $\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^T$. På samma sätt ger $A\mathbf{x} = -3\mathbf{x}$ egenvektorer $\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Lösningen kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + D \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t},$$

där C och D är godtyckliga konstanter.

4. (a) Vi väljer den första basvektorn som $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. För den andra basvektorn gör vi först ansatsen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T + C \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Villkoret att denna vektor är ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ger $C = -4/3$. För att slippa irriterande nämnare tredubblar vi svaret och väljer $\mathbf{b}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T - 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Den sökta projektionen ges av

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

5. För definitionen av underrum, se kursboken.

Låt p och q vara två element i U , dvs $p(1) = q(1) = 0$, samt låt a och b vara två tal. Då är

$$(ap + bq)(1) = ap(1) + bq(1) = 0,$$

dvs $ap + bq$ ligger i U . Detta visar att U är ett underrum.

För att bestämma en bas observerar vi först att $\mathbb{P}_2$ har dimension 3 och att U inte är lika med hela $\mathbb{P}_2$. Alltså har U dimension högst 2. Men å andra sidan är $x - 1$ och $(x - 1)^2$ två linjärt oberoende element i U . Dimensionen av U är alltså lika med 2, och de båda givna polynomen bildar en bas. (Det finns andra sätt att resonera.)

6. Det är geometriskt klart att det speglande planet består av egenvektorer med egenvärdet 1, och planets normal, dvs linjen $t \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, av egenvektorer med egenvärdet -1 . Tar man två icke-parallella vektorer i planet och en tredje på linjen har man hittat tre linjärt oberoende egenvektorer, och enligt Sats 2 i kapitel 5 kan det då inte finnas fler (detta är också ganska uppenbart geometriskt).

För att bestämma speglingen av vektorn $\mathbf{v}$ beräknar vi först ortogonala projektionen $\mathbf{v}'$ på planets normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Enligt projektiionsformeln är

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{3}{3} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Speglingen ges då av

$$\mathbf{v} - 2\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

7. Om AB är inverterbar är $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Alltså är varken $\det(A)$ eller $\det(B)$ lika med 0, vilket medför att A och B båda är inverterbara.

Alternativ lösning: Om AB är inverterbar finns en matris $C = (AB)^{-1}$ så att $(AB)C = C(AB) = I$, dvs $A(BC) = (CA)B = I$. Enligt Sats 8 i Kapitel 2 gäller då även $(BC)A = B(CA) = I$. Alltså är A och B inverterbara med $A^{-1} = BC = B(AB)^{-1}$ och $B^{-1} = CA = (AB)^{-1}A$.