

TMA184 Linjär algebra V, vt 10

Vecko-PM läsvecka 4

Lay: 2.8 - 2.9, 4.1 - 4.6. Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang. Vektorrum.

Innehållet i avsnitten 2.8 och 2.9 täcks av kapitel 4, men presenterar begreppen på ett mer konkret sätt. Samtidigt behövs det mer abstrakta synsätt som ges i kapitel 4. Därför kommer vi att behandla kapitlen samtidigt och i viss mån hoppa fram och tillbaka. **För godkännnivå kan du välja att fokusera på avsnitt 2.8-2.9, men du bör ändå lösa en stor del av övningsuppgifterna ur kapitel 4.** Centrala begrepp är *underrum*, *bas för underrum*, *dimension* och *rang*, som preciserar en del av det vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är origo, linjer genom origo, plan genom origo, och hela $\mathbb{R}^3$. Dessa har dimension 0, 1, 2 respektive 3. En bas för linjen består av en vektor som spänner upp linjen, en bas för ett plan består av två vektorer som spänner upp planet. I kapitlet generaliseras detta till högre dimensioner.

Särskilt viktiga underrum i $\mathbb{R}^n$ är nollrum och kolonnrum till matriser. Nollrummet är lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kolonnrummet är mängden av alla $\mathbf{b}$ för vilka ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar. I sats 2.8.12 bevisas att de är underrum och av beviset framgår hur detta hänger samman med matrismultiplikationens linjära egenskaper.

Matrisrang, som är dimensionen för kolonnrummet, är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. Rangsatsen beskriver sambandet mellan dimensioner för nollrum och kolonnrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer*, vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 2.8.13 beskriver hur man gör.

Satsen om inverterbara matriser får ytterligare ett par viktiga punkter i detta kapitel. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4.

I kapitel 4 generaliseras avsnitt 2.8–2.9 till mer abstrakta så kallade vektorrum. Genom att konkretisera och jämföra med 2.8–2.9 så blir det mer gripbart. I övningsuppgifterna handlar det ofta om $\mathbb{R}^n$ och matriser. Idén i kapitlet är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper och det är först genom att gå till den allmänna teorin som vi kan hantera koordinatbyte riktigt bra. Att detta är viktigt framgår förhoppningsvis av matlab-övning 3 som visar att det i många tillämpningar handlar om att välja en bas som är lämplig för det aktuella problemet och sedan växla mellan olika baser med hjälp av *basbytesmatrisen* P_B . Vi fördjupar oss i detta nästa vecka, se 4.7.

I 4.1 är sats 1 med vars hjälp man ofta enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum extra viktig.

Exempel 4.2.8 och 4.2.9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs. Liksom för linjära ekvationssystem ges allmän lösning för linjära differentialekvationer av summan av en partikulärlösning och allmänna lösningen till homogena ekvationen. Här får denna analogi en förklaring.

I 4.5 ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension och sats 12, bassatsen, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas. Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
2.8	definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8	definiera begreppet <i>bas</i> för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8 4.2	definiera begreppet <i>nollrum</i> , $\text{Nul}(A)$, till en matris A , avgöra om en given vektor tillhör $\text{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Nul}(A)$.
2.8 4.2	definiera begreppet <i>kolonnrum</i> , $\text{Col}(A)$, till en matris A , avgöra om en given vektor tillhör $\text{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Col}(A)$.
2.9	definiera begreppet <i>koordinater för en vektor relativt en bas</i> och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.9	definiera begreppet <i>dimension</i> av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
2.9	definiera begreppet <i>rang</i> för en matris och bestämma rangen för en matris.
2.9	tillämpa <i>Rang-satsen</i> vid problemlösning
2.9	tillämpa <i>Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)</i> vid problemlösning

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
2.8 4.2	bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ och känna till deras tolkningar i samband med ekvationssystem och linjära avbildningar.
2.9	formulera och bevisa <i>Rang-satsen</i> .
4.1	känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
4.1	definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum
4.3	definiera begreppen <i>bas</i> för ett vektorrum
4.4	definiera begreppet <i>koordinater för en vektor relativt en bas</i> och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
4.4	använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning
4.5	bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V , än vad som finns i en bas för V , måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
4.5	definiera begreppet <i>dimension</i> för vektorrum.
4.6	förklara varför de olika egenskaperna som nämns i <i>Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)</i> är ekvivalenta.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
2.8	PP, 1, 3, 7, 9, 15-20, 23, 25	21, 22, 37	27, 31
2.9	PP, 1, 5, 7, 11, 13	15, 17, 18	19 - 27
4.1	PP, 1, 3, 4	7, 11, 15	19, 20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 37	25, 27, 30, 31, 33, 39
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 21, 23, 29, 30	27, 36, 37, 38
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11	13, 15, 19, 23, 25, 27, 29, 33
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	29 (med $V = \mathbb{R}^n$), 33	19, 21, 27, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	7, 9, 13, 15	17, 21, 25, 30, 35