MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 110113 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Ragnar Freij, 0703-088304

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar kommer att läggas ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) + 5x_2(t), \\ x_2'(t) = -10x_1(t) - 7x_2(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1. \end{cases}$$

3. (a) Förklara vad som menas med att matrismultiplikation är *associativ*. (1p)

(b) Illustrera med ett exempel att matrismultiplikation inte är *kommutativ*. (1p)

(c) Lös matrisekvationen (4p)

$$(AX + B)^T = X^T C,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm det värde på a som gör vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende. (3p)

(b) Låt nu $a = 1$ och låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^3$ bestående av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ då $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}^T$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en 45-graders 'moturs' rotation kring en axel genom origo och i riktningen $\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ (där $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$). (6p)

Bestäm T:s matris i standardbas på formen PMP^T. (Det räcker att bestämma P och M, matrismultiplikationen behöver ej utföras.)

6. Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ vara den linjära avbildning som ges av (6p)

$$T[p(t)] = (t^2 + t + 1)p''(t) - (1 + 2t)p'(t) + 2p(t).$$

Ange baser för kärnan (nollrummet) till T och för värdemängden till T.

7. (a) Bevisa att om A är en $n \times n$ ortogonalmatris, så är $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (3p)

(b) Bevisa att om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till en ortogonalmatris A, så är $|\lambda| = 1$. (3p)

Lycka till!
Hjalmar

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 110113	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\det(AB)$.

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Bestäm en ON-bas för det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMA841, Linjär Algebra V, 110113

1. (a) Eftersom B är triangulär så är dess determinant lika med produkten av talen längs diagonalen, dvs $\det(B) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Matrisen A kan med hjälp av lämpliga radoperationer omvandlas till triangulärformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att $\det(A) = 1\cdot(-1)\cdot(-7) = 7$. Slutligen är $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 7 \cdot 30 = 210$.

(b) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I]$ och omvandlar den till $[I|A^{-1}]$ genom lämpliga radoperationer. Detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Lämpliga radoperationer omvandlar matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivotelementen ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A spänner upp dess kolonnrum. Alltså är

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

För att hitta en bas till nollrummet måste vi lösa ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och bakåtsubstitution ger

$$x_1 = -x_3 - 2x_4, \quad x_2 = -x_3 - x_4,$$

vilket i sin tur medför att

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

(d) Vi ortogonaliserar först basen genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{18}{9}\right)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalisering ger nu ON-basen

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Vi har

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi beräknar först

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = (\lambda+2)(\lambda-3),$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$.

Vi har $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde -2.

Vi har $A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde 3.

Därmed har vi diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

3. (a) Associativitet betyder att $(AB)C = A(BC)$ när alla produkterna är definierade.

(b) Tag exempelvis $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller att $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ medan $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Först kan vi transponera i båda leden och erhåller

$$AX + B = (X^TC)^T = C^TX = CX, \quad \text{ty } C^T = C.$$

Detta medför att $B = CX - AX = (C-A)X$ så, förutsatt att $C - A$ är inverterbar, är

$$X = (C-A)^{-1}B.$$

Vi har

$$C - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (C-A)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi ställer upp vektorerna i en matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5a-7 \end{bmatrix}.$$

De ursprungliga tre vektorerna är därmed linjärt beroende om och endast om $5a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7/5$.

(b) Vi har $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ där

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Samma radoperationer som användes i (a) ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right].$$

Via bakåtsubstitution härleder vi att $c = 5$, $b = -3$, $a = 4$.

Därmed är $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T$.

5. Följer man metoden i laboration 4 så får man

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Man kan kontrollera att

$$T(1) = 2, \quad T(t) = -1, \quad T(t^2) = 2$$

vilket ger

$$R(T) = \mathrm{Span}\{1\}, \quad K(T) = \mathrm{Span}\{1 + 2t, 1 - t^2\}.$$

7. (a)

$$||A\mathbf{x}||^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T I\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2.$$

(b) Låt λ vara ett egenvärde till en $n \times n$ ortogonalmatris A. Då finns det en nollskild vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Men från (b) har vi då att

$$||\mathbf{x}|| = ||A\mathbf{x}|| = ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|||\mathbf{x}||,$$

och eftersom $||\mathbf{x}|| \neq 0$ så måste $|\lambda| = 1$.