

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare

Datum: 110316 kl. 08.30–12.30

Telefonvakt: Emil Gustafsson, 0703-088304

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2011 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar samt tid och plats för visning kommer att läggas ut på kurshemsidan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (14p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.
2. Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & 1 & a \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2a \end{bmatrix}^T$.
 - (a) För vilka värden på a ligger nollvektorn i $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? (2p)
 - (b) För vilka värden på a ligger $\mathbf{w}$ i $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? (2p)
 - (c) För vilka värden på a är vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ linjärt beroende? (2p)
3.
 - (a) Definiera vad som menas med ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$. (2p)
 - (b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett underrum H i $\mathbb{R}^4$. (2p)
Bestäm en ortogonal bas för H .
 - (c) Bestäm ortogonal projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ på H . (2p)
4.
 - (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. (4p)
 - (b) Beräkna A^{2011} . (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på deluppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. För att få poäng måste du motivera ditt svar väl. Om du hävdar att ett påstående är SANT, motivera varför det är sant (du får hänvisa till satser i boken). Om du hävdar att ett påstående är FALSKT, illustrera varför med ett motexempel.

- (a) Om A och B är $n \times n$ -matriser, så gäller (2p)

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

- (b) Om $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och B är en godtycklig 3×3 -matris, så har B och AB samma nollrum. (2p)

- (c) Om A är en inverterbar 2×2 -matris så är A diagonaliserbar. (2p)

6. Låt V vara vektorrummet av alla polynom av formen $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Låt oss kalla ett polynom *symmetriskt* om $p(1/t) = p(t)/t^4$. Visa att de symmetriska polynomen bildar ett underrum i V . Bestäm en bas för samt dimensionen av detta underrum. (6p)

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av (6p)

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ för T relativt basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Lycka till!
Hjalmar

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 110316	sid.nummer 1	Poäng
------------	--------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

- (b) Beräkna determinanten (3p)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

- (c) Ett plan H i $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$. Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. För var och en av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, avgör om vektorn tillhör H , och bestäm i så fall dess koordinater i basen $\mathcal{B}$. (3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen

(3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar:

(e) Använd minstakvadratmetoden för att bestämma den rätta linje som bäst ansluter till de tre punkterna $(x, y) = (-1, 2), (0, 2), (1, -1)$.

(3p)

Lösning:

Svar:

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 110316

1. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I_3]$ och förvandlar den till $[I_3|A^{-1}]$ genom att utföra lämpliga radoperationer. Man kan bekräfta att detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Genom radoperationer och utvecklingar efter kolonn får vi

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

- (c) Vi ställer upp en utökad matris

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Lämpliga radoperationer ger trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Från den sista raden ser vi nu att $\mathbf{u}$ inte ligger i H medan $\mathbf{v}$ gör det. Bakåtsubstitution ger då i sin tur att $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1/2 \ 1/2]^T$.

- (d) Genom lämpliga radoperationer förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivoterna ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A , det vill säga $[1 \ 2 \ 1]^T$, $[3 \ 1 \ 2]^T$ bildar då en bas för kolonnrummet.

För att hitta en bas till nollrummet löser vi ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och bakåtsubstitution leder till

$$x_1 = -2x_3 - x_4, \quad x_2 = -x_3 + x_4.$$

En godtycklig vektor i nollrummet ges därmed av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En bas för nollrummet är då $[-2 \ -1 \ 1 \ 0]^T$, $[-1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$.

(e) Vi söker minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. Vi har

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow (A^T A)^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att den rätta linje som passar bäst har ekvationen $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

2. (a) Nollvektorn ligger i vilket vektorrum som helst så detta är sant för alla $a \in \mathbb{R}$.

(b) Lämpliga radoperationer ger

$$[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ | \ \mathbf{w}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{array} \right].$$

Från detta ser vi att $\mathbf{w} \in \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ om och endast om $2a - 1 = 0$, dvs $a = 1/2$.

(c) Från (b) vet vi redan att vektorerna är linjärt beroende då $a = 1/2$. Men i trappstegsformen (5) har vi också en nollrad då $a = 1$. Så det är dessa två värden på a som gör att de tre vektorerna blir linjärt beroende.

3. (a) Se kursboken.

(b) Kalla de två givna vektorerna för $\mathbf{v}_1$ resp. $\mathbf{v}_2$. Vi ortogonaliserar basen genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{3}{4} \right) \mathbf{v}_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För enkelhets skull, låt oss i stället välja $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 1 \ -3]^T$.

(c) Sätt $\mathbf{u} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Med den nyss framtagna ortogonalbasen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ för H kan vi använda projektnsformeln

$$\text{proj}_H \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} \right) \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T.$$

4. (a) Vi beräknar först

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ -3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

som innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$.

$\lambda_1 = 1$: Vi har $A - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = -2$: Vi har $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Därmed har vi diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Från diagonaliseringen ovan härleder vi att

$$A^{2011} = PD^{2011}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2^{2011} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2^{2011} & 2 + 2^{2012} \\ -1 - 2^{2011} & -1 - 2^{2012} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Detta är FALSKT. T.ex. om $A = I_2$, $B = -I_2$, så är $\det(A) = \det(B) = 1$, medan $\det(A + B) = \det(\mathbf{0}) = 0$.

(b) Detta är SANT. Påståendet kan formuleras som att systemen $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har samma lösning. Men matrisen AB ges av att byta plats på första och andra raden i B , så de båda systemen innehåller alltså samma ekvationer i olika ordning.

(Alternativt kan man använda att A är inverterbar. Då gäller

$$AB\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AB\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0};$$

den omvända implikationen är trivial.)

(c) Detta är FALSKT. Ett motexempel är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är inverterbar (dess determinant är $+1$), men enda egenvärdet är $\lambda = 1$ och motsvarande egenrum är bara 1-dimensionellt (det spänns upp av $[1 \ 0]^T$).

6. Å ena sidan är

$$p(1/t) = \frac{a}{t^4} + \frac{b}{t^3} + \frac{c}{t^2} + \frac{d}{t} + e.$$

Å andra sidan är

$$\frac{p(t)}{t^4} = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{d}{t^3} + \frac{e}{t^4}.$$

Dessa två funktioner är lika om och endast om $a = e$ och $b = d$. Om vi identifierar $\mathbb{P}_4$ med $\mathbb{R}^5$ genom att identifiera polynomet $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ med vektorn $[a \ b \ c \ d \ e]^T$ så kommer V att identifieras med rummet

$$\{[a \ b \ c \ d \ e]^T \in \mathbb{R}^5 : a = e \text{ och } b = d\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Detta är ett 3-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^5$ som spänns upp av de tre vektorerna ovan. Om vi går tillbaka till $\mathbb{P}_4$ så innebär detta att V är ett 3-dimensionellt underrum i $\mathbb{P}_4$ och att $\{t^4 + 1, t^3 + t, t^2\}$ är en bas för V .

7. Det är givet att $T(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, för $i = 1, 2, 3$. Enligt definition av matrisen för en linjär avbildning relativt en bas så är

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \ [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}}] = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} \ [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} \ [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{B}}] \\ &= {}_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{E}} = \left({}_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{B}} \right)^{-1} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Så det återstår att invertera matrisen. Detta görs på vanligt vis (se uppgift 1(a)), och det visar sig att

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$