

Linjär algebra V 2011

LAB 4: Minsta kvadrat-metoden

Kalibrering av materialmodell

(Med tack till Mikael Enelund som formulerat uppgiften.)

Metaller vid hög temperatur kryper. Med detta menas att om vi utsätter dem för en konstant spänning så ökar deformationen (töjningen) med tiden. Detta är en viskoelastisk effekt.

Experiment har visat att spännings-töjningsförhållandet är icke-linjärt. En ofta använd modell för krypning hos metaller är Nortons modell (se t.ex. Grundläggande Hållfashetslära, Hans Lundh)

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{1}{\tau} \left| \frac{\sigma}{\sigma_c} \right|^n, \quad (1)$$

där $\dot{\varepsilon}^c$ är kryptöjningshastigheten och σ_c är en referensspänning. Tidskonstanten τ och exponenten n är konstanter eller parameterar som bestäms ur experiment. Värdet på τ beror på valet av σ_c , som kan ses som en normeringsfaktor. Att bestämma parameterarna utifrån experiment kallas *kalibrering*.

Uppgift

Parametrarna i Nortons modell skall anpassas till experimentella krypdata för koppar vid $T = 250^\circ\text{C}$.

i	1	2	3	4	5
σ [MPa]	49,1	75,6	105,1	130,5	150,4
$\dot{\varepsilon}^c$ [s^{-1}]	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$

Tabell 1: Experimentella värden på töjningshastigheten för olika spänningsnivåer för koppar vid 250°C

Ur tabellen ser vi exempelvis att vid spänningsnivån $\sigma = 49,1 \text{ MPa}$ är töjningshastigheten $1,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ dvs det tar $t = 0,01 / 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ s} \approx 200 \text{ h}$ för materialet att krypa (töjas) 1%. Vi ser att töjningshastigheten ökar snabbt med spänningsnivån.

Vi börjar med att skriva om Nortons modell (1) med hjälp av logaritmering som

$$\ln(\dot{\varepsilon}^c) = n \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right) - \ln(\tau) \quad (2)$$

Vi väljer referensspänningen $\sigma_c = 1 \text{ MPa}$. Varje mätpunkt ger då ett linjärt samband för de obekanta n och $\ln(\tau)$.

Vi får således ett linjärt ekvationssystem med två obekanta och fem ekvationer. Skriv detta ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} n & \ln(\tau) \end{bmatrix}^T$ och A och $\mathbf{b}$ ges av mätdata.

Kontrollera med `rref` att detta system inte har någon lösning.

Bestäm sedan minstakvadratlösningen dels genom att lösa ekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ med hjälp av `rref`, dels med $\mathbf{x} = A \backslash \mathbf{b}$.

När parametrarna n och τ har bestämts, använd dem till att förutsäga töjningshastigheten vid spänningsnivån 100 MPa. Rita även grafen till sambandet (2) för intervallet $\sigma \in [40, 160] \text{ MPa}$, och lägg in de experimentellt bestämda punkterna i samma figur.

Om du får tid över, fortsätt gärna arbeta med tidigare labbar.