

TMA184 Linjär algebra V, vt 13

Vecko–PM läsvecka 3

Lay: 3 Determinanter och 4 Vektorrum

I kapitel 3.1 introduceras *determinanten* till en matris. Detta studerade vi i den inledande kursen, men då bara för 2×2 - och 3×3 -matriser. Sats 1 tillsammans med sats 3 i avsnitt 3.2 är väsentlig vid determinantberäkning.

Sats 2, om determinanten av en triangulär matris, leder till sats 4, som är ett viktigt tillägg till sats 8 i kapitel 2. En matris är inverterbar om och endast om dess determinant inte är 0.

Cramers regel i 3.3 ger en formel för beräkning av lösning till ekvationssystem, en obekant i taget. Metoden är inte direkt ämnad för praktiskt bruk då man löser ekvationssystem, men ger en möjlighet att beskriva hur lösningen varierar då koefficienterna eller högerledet ändras. Detta är värdefullt i en del tillämpningar, därför skall du kunna den.

Metoden för matrisinvertering i Sats 3.3.8 är arbetskrävande och rekommenderas inte heller för praktiskt bruk, i synnerhet inte för matriser större än 3×3 . Metoden är huvudsakligen av teoretiskt intresse.

Area och volymberäkning med determinant är repetition från inledande kurs.

I kapitel 4 generaliseras avsnitt 2.8–2.9 till mer abstrakta så kallade vektorrum. Genom att konkretisera och jämföra med 2.8–2.9 så blir det mer gripbart. Idén i kapitlet är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper och det är först genom att gå till den allmänna teorin som vi kan hantera koordinatbyte riktigt bra.

I 4.1 är sats 1 med vars hjälp man ofta enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum extra viktig.

I 4.5 ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension och sats 12, bassatsen, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas. Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.

I avsnitt 4.4 infördes koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för en vektor $\mathbf{x}$ relativt en bas $\mathcal{B}$. Basbytesmatrisen $P_{\mathcal{B}}$ som ger sambandet $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ mellan en vektor $\mathbf{x}$ och koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ infördes i samband med exempel 4.4.4. Målet i 4.7 är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två olika baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. Sats 15 säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen som konverterar $\mathcal{B}$ -koordinater till $\mathcal{C}$ -koordinater betecknas ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$. Eftersom ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ är det logiskt att pilen går från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$. Riktningen, från höger till vänster, motiveras också om vi ser på upprepade koordinatbyten, först från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$ sedan från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$. Det sammansatta koordinatbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{D}$ ges av matrisprodukten ${}_{\mathcal{D}}P_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$.

Lay	Mål
3.1	beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1
3.2	förenkla kalkylerna med hjälp av sats 2, 3 och 5
3.2	utnyttja sats 4 för att avgöra om en matris är inverterbar
3.2	tillämpa sats 6 i problemlösning
3.3	utnyttja Cramers regel (sats 7) i problemlösning
3.3	beräkna invers till 3×3 -matris med hjälp av sats 8
4.2	avgöra om en given vektor tillhör $\text{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Nul}(A)$.
4.2	avgöra om en given vektor tillhör $\text{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Col}(A)$.
4.7	växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$; Sats 4.7.15 är central

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
3.2	bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$ (sats 4)
3.3	bevisa Cramers regel (sats 7)
3.3	redogöra för determinantens tolkning som area- eller volym skala för en linjär avbildning
4.1	känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
4.1	definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum
4.3	definiera begreppen <i>bas</i> för ett vektorrum
4.4	definiera begreppet <i>koordinater för en vektor relativt en bas</i> och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
4.4	använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning
4.5	bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V , än vad som finns i en bas för V , måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
4.5	definiera begreppet <i>dimension</i> för vektorrum.
4.6	förklara varför de olika egenskaperna som nämns i <i>Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)</i> är ekvivalenta.
4.7	växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$
4.7	bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V , relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V
4.7	växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
3.1	PP, 3, 15, 19, 20, 21, 37	7, 17	
3.2	PP, 1, 3, 5, 7, 11, 21, 25, 29	9, 15, 17, 19, 27, 37	32, 39, 43
3.3	PP, 1, 5, 13	19, 21, 23	26, 27, 32
4.1	PP, 1, 3, 4	7, 11, 15	19, 20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 37	25, 27, 30, 31, 33
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 21, 23, 29, 30	27
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11	13, 15, 19, 23, 25, 27, 29
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	29 (med $V = \mathbb{R}^n$)	19, 21, 27, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	7, 9, 13, 15	17, 21, 25, 30
4.7	PP, 1, 3, 5, 7	11, 19	13, 15