
Linjär Algebra V

– Sammanfattning

2015



Fraunhofer

CHALMERS
Research Centre
Industrial Mathematics

Johan Karlsson

`johan.karlsson@fcc.chalmers.se`

1.1 Linjära ekvationssystem

Linjär ekvation: $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$, a_i *koefficienter (reella tal)*

Flera ekvationer kan forma ett system:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m ekvationer, n obekanta x

Ofta bra att samla a_{ij} och b_i i matriser.

1.1-1.2 Linjära ekvationssystem

Lösa linjära ekvations-system $Ax = b$

Sätt upp utökade matrisen $[A \ b]$

Omforma till trappstegs-system med

- Skala rad med konstant skilld från 0.
- Radbyte
- Ersätt rad med raden + multipel av annan rad.

Skapa nästan identitetsmatris till vänster.

Tre fall:

- Om motsägelse så ingen lösning
- Om kolonner utan pivotelement så parameterlösningar
- Annars unik lösning

1.3-1.6 Vektorer

En vektor är en n -tuppel av tal $\in R$ (eller $\in C$).

Mängden av alla vektorer med n element betecknas R^n .

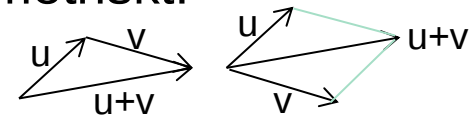
Geometriskt är en vektor en pil med längd och riktning, men utan fast position.

Kan tex representeras med pil från origo till en given punkt.

Vektoraddition beräknas koordinatvis:

$$x * (a, b) + y * (c, d) = (x * a + y * c, x * b + y * d)$$

Geometriskt:



En linjärkombination av vektorerna i $\{v_1, \dots, v_p\}$ är en summa $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p$ med skalära vikter $\{c_1, \dots, c_p\}$.

Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna i en mängd $\{v_1, \dots, v_p\}$ (den del av R^n som mängden spänner upp) kallas spannet (linjära höljet) av vektorerna, $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$



1.3-1.7 Linjärt beroende

En mängd vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ är *linjärt beroende* om det finns skalära vikter $\{c_1, \dots, c_p\}$ (som inte alla är 0) så att $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$

Med andra ord: någon vektor går att uttrycka som en linjärkombination av resten.

En mängd vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ är *linjärt oberoende* om enda lösningen till $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$ är att låta alla c vara 0.

1.8-1.9 Linjära transformationer (funktioner)

En transformation T från R^n till R^m är en regel som till varje vektor $x \in R^n$ tilldelar en vektor $T(x) \in R^m$

En transformation T är linjär omm

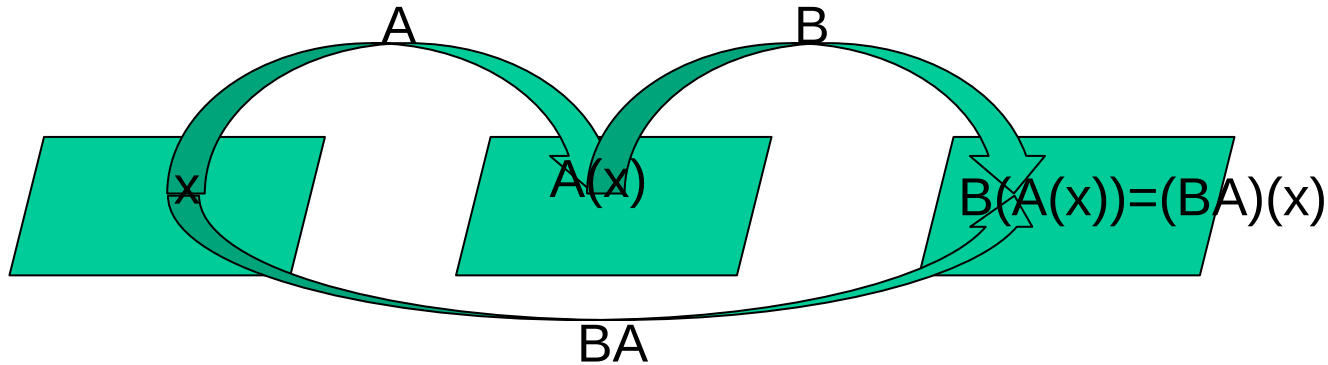
$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

Ett nödvändigt, men inte tillräckligt, krav är $T(0) = 0$

Varje *linjär* transformation $T(x)$ från R^n till R^m är en matris-transformation $T(x) = Ax$

$$A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$$

2.1 Matrisräkning



$$AB \neq BA$$

Matrismultiplikation:

$$AB_{ij} = [A_{i1} \ A_{i2} \ \dots] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \end{bmatrix} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots$$

Transponat: rader blir kolonner och tvärtom

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$



2.2-2.4 Matris-invers

A (kvadratisk) är inverterbar om det finns en matris A^{-1} sådan att $AA^{-1} = I$ och $A^{-1}A = I$

Finns invers till A så har $Ax = b$ unik lösning $x = A^{-1}b$ för alla b

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$[A \ I] \sim [I \ A^{-1}]$ Går det inte så är A inte inverterbar.

För 2x2-matris: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Är $ad-bc=0$ så är A inte inverterbar.

2.8 Vektor-rum

Ett (under)rum (till R^n) är en mängd H i R^n med egenskaperna:

- Nollvektorn är i H .
- Om u och v är i H , så är $u+v$ i H .
- Om u är i H och c är skalär, så är cu i H .

En bas för rummet H är en mängd linjärt oberoende vektorer som spänner upp H , dvs alla vektorer i H kan uttryckas som en unik linjärkombination av basvektorerna.

2.8-2.9 Rum och deras dimension

Col A: alla linjärkombinationer av kolonner i A

Bas: $A \sim B$, kolla pivotkolonner i B, ta motsvarande kolonner i A

Row A: alla linjärkombinationer av rader i A

Bas: $A \sim B$, B trappstegsform, ickenollrader ur B

Nul A: alla lösningar till $Ax=0$

Bas: varje parameter i lösning ger en basvektor

Col A och Row A är uppenbart rum.

Nul A:

$A0=0$, så 0 ligger i Nul A.

$Acu=cAu=c0=0$, så cu ligger i Nul A om u gör det.

$A(u+v)=Au+Av=0+0=0$, så $u+v$ ligger i Nul A om u och v gör det.

2.9 Dimension av rum

$\text{Dim}(H)$ =antal vektorer i bas för H

$\text{Rang}(A)=\text{dim}(\text{Col}(A))=\text{dim}(\text{Row}(A))$

$\text{Rang}(A)+\text{dim}(\text{Nul}(A))=n$ (A har n kolonner)

$A \sim B$ (radreducerad)

Antal pivotkolumner i A och B = antal ickenollrader i B

Därför är $\text{dim}(\text{Col}(A))=\text{dim}(\text{Row}(A))$ och vi kallar det Rang.

$\text{Rang}(A)$ är antal pivotkolumner.

Varje ickepivotkolumn ger en fri variabel och en basvektor för $\text{Nul}(A)$.

Så $\text{Rang}(A)+\text{dim}(\text{Nul}(A))=n$

2.9 Koordinatvektor

Vektorn x 's koordinater i basen $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ kan skrivas

unikt som koordinatvektorn $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

$$\text{dvs} \quad x = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p = B \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = x$$

Alltså kan vi lösa för $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ genom att ställa upp $[B \ x] \sim \dots$

Kapitel 3 Determinant av (kvadratisk nxn) matris

$$\det([a]) = a$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Utveckla längs rad: $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

eller kolonn: $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

A_{ij} är matrisen man får om man raderar rad i och kolumn j från A.

Om A triangulär så $\det(A)$ =produkt av diagonalelement
Elementära radoperationer (kolonn-op på samma sätt):

- Addera mult av rad till annan rad: ändrar ej det
- Radbyte: byt tecken på det
- Skala rad med k: skala det med k

$$\det A = \det A^T \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)$$



3 Determinant och area/volym:

Absolutbeloppet av $\text{Det}(A)$ är lika med arean/volymen av parallelogram/parallelepiped som spänns upp av kolumnerna i A .

Om T är en linjär transformation bestämd av A och S är en ändlig region så är "arean/volymen" av $T(S)$ lika med absolutbeloppet av determinanten av A multiplicerat med arean/volymen av S .

4.1-4.4 Koordinater i en bas

$$x = P_B [x]_B \quad [x]_B = P_B^{-1} x \quad P_B = [b_1 \quad \dots \quad b_n]$$

x är koordinater för punkten x i standardbasen

$[x]_B$ är koordinater för punkten x i basen B

$$P_B [x]_B = [b_1 \quad \dots \quad b_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = x$$

4.6-4.7 Basbyte

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ är två baser för V .

Då finns en unik basbytesmatris $P_{C \leftarrow B}$ så att

$$[x]_C = P_{C \leftarrow B} [x]_B \quad [x]_B = P_{C \leftarrow B}^{-1} [x]_C \quad P_{B \leftarrow C} = P_{C \leftarrow B}^{-1}$$

Tre sätt att beräkna basbytesmatrisen:

$$P_{C \leftarrow B} = P_C^{-1} P_B$$
$$([x]_C = P_C^{-1} x = P_C^{-1} P_B [x]_B)$$

$$P_{C \leftarrow B} = [[b_1]_C \quad \dots \quad [b_n]_C]$$
$$(P_C^{-1} P_B = P_C^{-1} [b_1 \quad \dots \quad b_n] = [P_C^{-1} b_1 \quad \dots \quad P_C^{-1} b_n] = [[b_1]_C \quad \dots \quad [b_n]_C])$$

$$[P_C \ P_B] \sim [I \ P_{C \leftarrow B}]$$
$$(P_C P_{C \leftarrow B} = P_B)$$



4.6-4.7 Basbyte för transformation

A matris för transformation i basen B.

Vad är matrisen för transformationen i basen C?

Tänk så här:

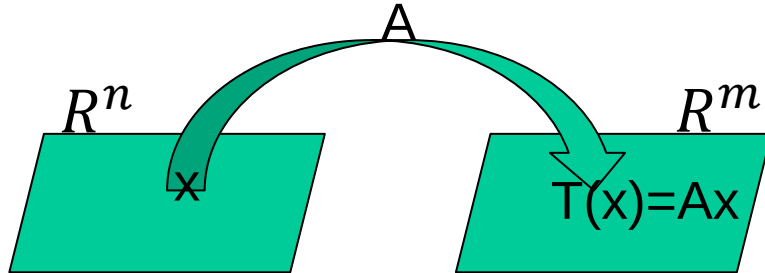
1. Vi startar ju nu med vektorer v i basen C.
2. Byt från C till B, dvs applicera $P_{B \leftarrow C}$, alltså $P_{B \leftarrow C}[v]_C$
3. Applicera transformationen A, alltså $A(P_{B \leftarrow C}[v]_C)$
4. Byt tillbaka från B till C, dvs applicera $P_{B \leftarrow C}^{-1}$, alltså $P_{B \leftarrow C}^{-1}(AP_{B \leftarrow C}[v]_C)$

Transformationsmatrisen i basen C blir alltså $P_{B \leftarrow C}^{-1}AP_{B \leftarrow C}$



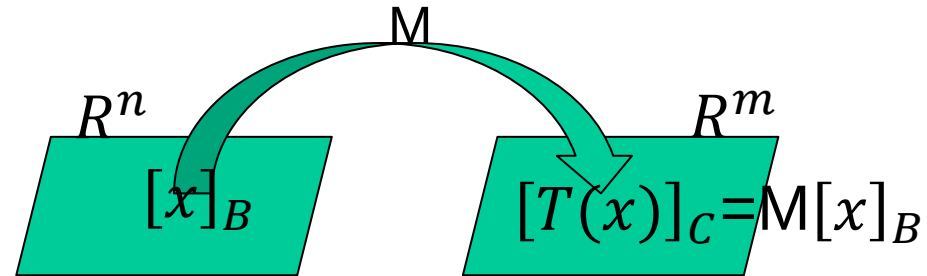
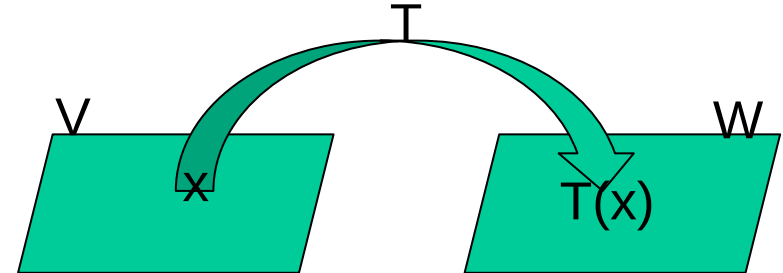
4.7 Hantera generella vektorrum via koordinatvektor

Kapitel 2:



$$A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$$

Kapitel 4:



$$M = [[T(b_1)]_C \quad \dots \quad [T(b_n)]_C]$$

Kapitel 5 Eigenvärden & egenvektorer

$Ax = \lambda x$ λ egenvärde x egenvektor ($\neq 0$)

$\det(A - \lambda I) = 0$ ger egenvärdena

Egenvärdena till triangulär matris är diagonalelementen.

$\text{Nul}(A - \lambda I)$ ger sedan egenvektorerna

A diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$ med D diagonal
om det finns en bas till R^n av egenvektorer till A .

De bildar då kolonner i P och D har motsvarande egenvärden.

Alltid möjligt om A har n olika egenvärden,

ty egenvektorer från olika egenvärden är linjärt oberoende.

A diagonaliserbar om dimensionen av egenvektorsrummet är lika med multipliciteten för alla egenvärden.

5 (Sats 8 i 5.4)

$A = PDP^{-1}$ B är basen av kolumner i P.

Då är D B-matrisen för transformationen $T(x)=Ax$,

Dvs i basen B representeras transformationen enkelt med en diagonalmatris.

$$\begin{aligned}[T]_B &= [[T(b_1)]_B \quad \dots \quad [T(b_n)]_B] = [[Ab_1]_B \quad \dots \quad [Ab_n]_B] = \\ &[P^{-1}Ab_1 \quad \dots \quad P^{-1}Ab_n] = P^{-1}A[b_1 \quad \dots \quad b_n] = P^{-1}AP = \\ &P^{-1}(PDP^{-1})P = D\end{aligned}$$

6.1 Skalarprodukt & ortogonalitet

Skalarprodukt (i R^n).

u och v kolonnvektorer

$$u \cdot v = u^T v$$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Normalisering: $u = \frac{v}{\|v\|}$

u ortogonal mot v omm $u \cdot v = 0$

u ortogonal mot W omm $u \cdot v = 0$ för alla v i W

Mängden av vektorer ortogonala mot W kallas
ortogonala komplementet till W .

x är ortogonal mot W omm x är ortogonal mot varje
vektor i en mängd som spänner upp W .

En mängd vektorer kallas ortogonal om varje par av
vektorer i mängden är ortogonala.



6.1 Onbas & ortogonal matris

En ortogonal mängd kallas ortonormerad (ortonormal) om vektorerna är normerade till enhetsvektorer (längd 1).

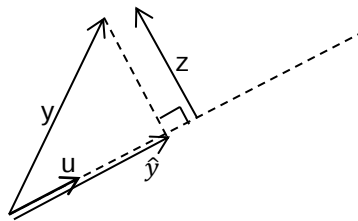
En ortogonal bas är en bas som även är en ortogonal mängd. En ortonormerad bas (ONbas) har dessutom normerade basvektorer (längd 1).

U har ortonormerade kolonner (& rader) (kallas att U är ortogonal) om

$$U^T U = I \quad \text{dvs} \quad U^T = U^{-1}$$

6.2 Projektion på linje definierad av vektor

Ortogonal projektion av y på u : $\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$



$$\hat{y} = a * u$$

$$y = \hat{y} + z \Leftrightarrow z = y - \hat{y} = y - a * u$$

$$z \text{ ortogonal mot } u \Leftrightarrow$$

$$0 = z \cdot u = (y - a * u) \cdot u = y \cdot u - a * u \cdot u \Rightarrow a = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} \Rightarrow \hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$$

Om u är normaliserade till längd 1:

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u = y \cdot u * u \quad \text{där } y \cdot u \text{ är längden och } u \text{ riktningen}$$



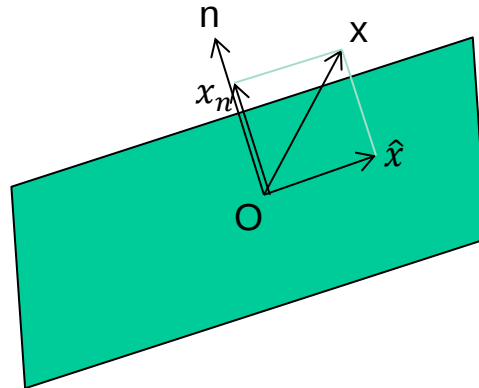
6.2 Projektion på plan genom origo

Plan: Alla punkter x (vektorer från origo) som uppfyller
 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$

Normal (vektor ortogonal mot planet): (a,b,c)

Projektion av godtycklig vektor x på normalen n : $x_n = \frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$

Projektion av x på planet: $\hat{x} = x - x_n$



6.3 Projektion av vektorn y till rum W med ortogonal bas B

y kan ligga i eller utanför W .

Observera att metoden inte fungerar om B inte är ortogonal!

$$\begin{aligned} 0 &= (y - \text{proj}_W(y)) \cdot b_i = (y - c_1 b_1 - \cdots - c_n b_n) \cdot b_i \\ &= y \cdot b_i - c_i (b_i \cdot b_i) \end{aligned}$$

$$c_i = \frac{y \cdot b_i}{b_i \cdot b_i} \quad \text{proj}_W(y) = \left(\frac{y \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} \right) b_1 + \cdots + \left(\frac{y \cdot b_p}{b_p \cdot b_p} \right) b_p$$

Med ortonormerad bas (ONbas) B för W :

$$c_i = y \cdot b_i \quad \text{proj}_W(y) = (y \cdot b_1) b_1 + \cdots + (y \cdot b_p) b_p = BB^T y$$

6.4 Skapa en ortonormerad (ON) bas

Gram-Schmidt:

Skapa ONbas $\{v_1 \dots v_p\}$ från bas $\{x_1 \dots x_p\}$:

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 v_1}{v_1 v_1} v_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{x_3 v_2}{v_2 v_2} v_2$$

etc.

Normalisera i varje steg eller för alla efteråt

6.5-6.6 Approximativ Minsta-kvadrat-lösning

$Ax=b$ har inte alltid någon exakt lösning

(i praktiken finns nästan aldrig någon exakt lösning).

Då kan man istället bestämma den lösning som är så nära att uppfylla ekvationen som möjligt.

Om "nära" mäts som $\|Ax - b\|$ är så liten som möjligt så kallas detta minstakvadratlösning.

Minstakvadratlösningen till $Ax = b$ är lösningen till $A^T Ax = A^T b$

Om kolumnerna i A är linjärt oberoende så är $A^T A$ inverterbar.

Då finns en unik minstakvadratlösning $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

6.6 Anpassning av kurva till datapunkter

För punkter på linje gäller $y = \beta_0 + \beta_1 x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$

Med flera data punkter: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = X\beta$

I praktiken finns ingen exakt lösning så vi kör
minstakvadratlösning

Dvs lös $X^T X \beta = X^T y$

(för andra kurvor än linjer och för ytor istället för kurvor i fler dimensioner blir X annorlunda med det funkar likadant)

7.1 Diagonalisering av symmetriska matriser

A ortogonalt diagonaliserbar om $A = PDP^T$ D diagonal, P ortogonal

Om $A = A^T$ så kallas A symmetrisk

Om A är symmetrisk så är

- egenvektorer för olika egenvärden inte bara linjärt oberoende utan ortogonala.
- Dimensionen på egenvektorsrum = multiplicitet av egenvärde

A är ortogonalt diagonaliserbar om A är symmetrisk.