

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Bestäm en matris A så att $\{[4 \ 6 \ -6 \ 2]^T, [-8 \ 0 \ 7 \ 5]^T, [8 \ -2 \ -7 \ -4]^T\}$ är en bas för $\text{Col}(A)$ och $[-1 \ -5 \ -3 \ 3 \ 1]^T$ ligger i $\text{Nul}(A)$. (6p)

3. Låt $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$, $\mathbf{v}_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$.

(a) Bestäm en ortonormerad bas för $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

(b) Bestäm ortogonal projektionen av $\mathbf{u}$ på $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

(c) Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

4. Låt A vara matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden till A (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till A . (2p)

(c) Diagonalisera A . (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Vad är det största vertikala avståndet från någon av punkterna $(-2,-1)$, $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,-2)$ och $(2,-2)$ till den enligt minstakvadratmetoden bäst anpassade andragradskurvan? (5p)
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)
- (a) Om A och B är $n \times n$ -matriser, så är $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
 - (b) Om en matris är radekvivalent med enhetsmatrisen så är den diagonaliserbar.
 - (c) Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ är två 2×1 matriser så har matrisen $\mathbf{uv}^T$ alltid rang 1.
7. (a) Definiera vad som menas med en ortogonal matris samt ge ett exempel på sådan matris. (2p)
- (b) Visa att för en ortogonal matris U gäller att $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$. (2p)
- (c) Bevisa att om $A = PBP^{-1}$ så har A och B samma egenvärden. (3p)

Lycka till!

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 140312	sid.nummer 1	Poäng
------------	---------------------------------------	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats
(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm a så att $\mathbf{u}$ ligger i $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{u} = [1 \ 14 \ a \ -9]^T$, $\mathbf{v}_1 = [2 \ -2 \ 4 \ 0]^T$,
 $\mathbf{v}_2 = [1 \ 4 \ -4 \ -3]^T$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (b) Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. För vilka högerled $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik, inga, respektive
oändligt många lösningar? (2p)

Lösning:

Svar:

- (c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm determinanten av A .

Lösning:

Svar:

Var god vänd!

- (d) Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ vara bas för $\mathbb{R}^2$. Antag att $\mathbf{v}$ har koordinaterna $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Bestäm en bas $\mathcal{C}$ så att koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den basen ges av $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}^T$. Ange sedan basbytematrisen ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$. (OBS! Valet av $\mathcal{C}$ är inte unikt). (3p)
- Lösning:**

Svar:

- (e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $2A + XB = X$.

Lösning:

.....

- (f) Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ och $T(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm matrisen för T i standardbasen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Lösning:

Svar:

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord

adjoint, adjugate
algorithm
angle
augmented matrix
auxiliary (equation)
backward (phase)
basic variable
basis
belongs to
change of basis
collinear (vectors)
column
column space
composition of linear transformations
condition
condition number
consistent system
constraint
dimension
distinct
domain
dot product
echelon (matrix)
eigenvalue, eigenvector
equivalent
finite (dimensional)
forward (phase)
general solution
homogeneous equation
identity matrix
if and only if
image
inconsistent (system)
inner product
inverse, invertible
kernel
least-square (method)

Svenskt ord

adjunkt, adjungerad matris
algoritm, räknescema
vinkel
totalmatris, utvidgad matris
hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
bakåt (fas)
bunden (ofri) variabel, basvariabel, bas
tillhör
basbyte
parallella (vektorer)
kolonn
kolonnrum
sammansatt linjär avbildning
villkor
konditionstal
lösbart system
restriktion, villkor
dimension
distinkta, olika
definitions mängd
skalärprodukt
trappstegs(matris)
egenvärde, egenvektor
ekvivalent, likvärdig
ändligt (dimensionell)
framåt (fas)
allmän lösning
homogen ekvation
enhets matris, identitets matris
om och endast om
bild
olösbart (system)
skalärprodukt
invers, inverterbar
kärna, nollrum
minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdeomängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)