MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 150416 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg
0703-088304

TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-1 & 6 & 4 & -2\end{bmatrix}^T\}$ vara en bas för ett underrum W till $\mathbb{R}^n$.

(a) Bestäm n (1p)

(b) Vad är dimensionen på W? (1p)

(c) Bestäm en ortonormal bas för W (4p)

3. (a) Definiera vad som menas med *ortogonal* matris (1p)

(b) Definiera vad som menas med *ortogonalt diagonaliserbar* matris. (1p)

(c) Gör en ortogonal diagonalisering av matrisen (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

TIPS: Använd rad/kolumn-operationer

4. Givet en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ för $\mathbb{R}^3$ definiera vektorerna

$$\mathbf{c_1} = 2\mathbf{b_1} - \mathbf{b_2}, \quad \mathbf{c_2} = \mathbf{b_3} - \mathbf{b_1}, \quad \mathbf{c_3} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$$

(a) Visa att $\mathcal{C} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}\}$ också är en bas för $\mathbb{R}^3$ (2p)

(b) Ange basbytesmatrisen (2p)

(c) Ange koordinaterna av $\mathbf{v} = 7\mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}$ i basen $\mathcal{C}$ (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (12p)

(a) Alla plan i $\mathbb{R}^3$ är underrum till $\mathbb{R}^3$

(b) Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

(c) Produkten av två ortogonala matriser är en ortogonal matris

(d) Det finns ett underrum till $\mathbb{R}^4$ som är en delmängd av alla möjliga underrum till $\mathbb{R}^4$

(e) Kvadratiska formen $Q(x, y, z) = 2x^2 + 6xy + 2y^2 + z^2$ är positivt definit

(f) $\mathrm{Nul}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$ är lika med det ortogonala komplementet till $\mathrm{Nul}(A)$

6. En $n \times n$ matris A kallas antisymmetrisk om $A^T = -A$.

(a) Visa att alla diagonala elementen i en antisymmetrisk matris är lika med noll (1p)

(b) Visa att varje $n \times n$ matris M kan skrivas som $M = B + C$, då B är symmetrisk och C är antisymmetrisk (3p)

(c) Visa att $\det A = 0$ då A är en $n \times n$ antisymmetrisk matris och n är udda (2p)

Lycka till!

Anonym kod	TMA841 Linjär algebra V 150416	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka högerled $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T$ har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen, unik, respektive oändligt många lösningar? (2p)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten av matrisen A: (2p)

$$A = BC, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ och A är matrisen i uppgiften 1(b). (3p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Bestäm transformationen $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ som avbildar $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}^T$ på $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ på $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}^T$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm en matris A så att $AB = A + C$ då (2p)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm baser för $\mathrm{Col}(A)$ och $\mathrm{Nul}(A)$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionell)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)

Lösningar TMA841 Linjär algebra V 150416

1. (a)

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & b_1 \\ -1 & 1 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 \end{bmatrix},$$

dvs ingen lösning om $b_1 - 2b_2 \neq 0$ och oändlingt många lösningar om $b_1 - 2b_2 = 0$. Aldrig unik lösning.

(b) $det(A) = det(B)det(C) = (1 * 1 * 1 * 1) * (1 * (-3) * 2 * 1) = -6$

(c)

$$BCx = b$$

Låt $Cx = y$.

$By = b$ ger $y_1 = 1$, $y_2 = 6 - 3 * 1 = 3$, $y_3 = 0 + 1 = 1$ och $y_4 = 3 + 3 * 1 - 4 * 3 + 2 * 1 = -4$. $Cx = y$ ger nu $x_4 = -4$, $x_3 = (1 - 4 * (-4))/2 = 17/2$, $x_2 = (3 - 6 * 17/2)/(-3) = 16$ och $x_1 = 1 + 3 * (-4) + 2 * 17/2 + 2 * 16 = 38$.

(d)

$$A \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A = C(B - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

(f)

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -8 & -5 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotkolumner ger bas för $ColA$ som motsvarande kolumner i A, alltså

$$\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}^T\}.$$

Lösningar till Ax=0 blir

$$x = \begin{bmatrix} (-3k - s + 5t)/2 \\ (-5k - s + 23t)/8 \\ k \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

med k, s och t godtyckliga reella tal, vilket ger en bas för nollrummet:

$$\{\begin{bmatrix} -3/2 & -5/8 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1/2 & -1/8 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 5/2 & 23/8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$$

2. (a) Eftersom vektorerna har fyra element är n=4.

(b) Dimensionen = antal basvektorer = 3.

(c)

$$b_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}^T \qquad b_2 = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \qquad b_3 = \begin{bmatrix}-1 & 6 & 4 & -2\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 \\ v_2 &= b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \\ v_3 &= b_3 - \frac{b_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{b_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^T \\ u_1 &= \frac{v_1}{\sqrt{v_1 \cdot v_1}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T \\ u_2 &= \frac{v_2}{\sqrt{v_2 \cdot v_2}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \\ u_3 &= \frac{v_3}{\sqrt{v_3 \cdot v_3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^T \\ ONbas &= \{u_1, u_2, u_3\} \end{aligned}$$

3. (a) $A^{-1} = A^T$

(b) A är ortogonalt diagonaliserbar om det finns diagonalmatris D och ortogonal matris P så att $A = PDP^{-1}$.

(c)

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -2 \\ 0 & -9+\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 7-\lambda & 5-\lambda \\ 0 & -9+\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(9-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)((7-\lambda)(5-\lambda)-8) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = (9-\lambda)(\lambda-9)(\lambda-3)$$

vilket innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenvektorerna $\begin{bmatrix}t & t & t\end{bmatrix}^T$ där t är godtyckligt reellt tal.

Som kolumn i P tar vi $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$.

$$A - 9I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenvektorerna $\begin{bmatrix}(-s-t) & s & t\end{bmatrix}^T$ där s och t är godtyckliga reella tal.

Ta tex $s = 0$ och $t = 1$ vilket ger $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. Den andra ska vara ortogonal mot denna och uppfylla $-1(-s-t) + 1t = s + 2t = 0$ vilket uppfylls tex av $t = 1$ och $s = -2$ vilket ger $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T$. Som kolumner i P tar vi $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}-1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix}1 \\ -2 \\ 1\end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4. (a)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ett pivotelement i varje kolumn betyder att de nya vektorerna är linjärt oberoende. Ett pivotelement i varje rad betyder att de spänner upp rummet. Alltså är de en bas.

(b) $P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B & [c_3]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $[v]_C = P_{C\leftarrow B} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = P^{-1}_{B\leftarrow C} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -15 \\ -17 \\ 13 \end{bmatrix}$

5. (a) Falskt. Plan som inte går genom origo är inte underrum eftersom nollvektorn inte ingår då.

(b) Falskt. Motexempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Au = Av = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

(c) Sant. $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I$.

(d) Sant. Mängden som bara består av nollvektorn är ett underrum och alla underrum måste innefatta nollvektorn.

(e) Falskt. Q(1,-1,0)=-3

(f) Falskt. Om A inte är kvadratisk ligger de inte ens i samma $\mathbb{R}^n$. Om tex A är en 3*5-matris så är $Nul(A^T)$ en del av $\mathbb{R}^3$ medan ortogonala komplementet till $Nul(A)$ är en del av $\mathbb{R}^5$.

6. (a) $a_{ij} = -a(ji) \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

(b)

$$B = (M + M^T)/2$$

$$C = (M - M^T)/2$$

$$B + C = M$$

$$b_{ij} = m_{ij}/2 + m_{ji}/2 = b_{ji}$$

vilket betyder att B är symmetrisk.

$$c_{ij} = m_{ij}/2 - m_{ji}/2 = -c_{ji}$$

vilket betyder att C är antisymmetrisk.

(c)

$$det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A) \Rightarrow det(A) = 0$$