

### TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

---

## Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en bas för Col  $A$ . (2p)  
(b) Bestäm en bas för Nul  $A$ . (2p)  
(c) Ange rank  $A$  och dim Nul  $A$ . (1p)

3. Låt  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ , där  $\mathbf{t} \neq 0$ . Förklara varför  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$  inte är en linjär avbildning. (2p)

4. Låt  $A$  vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla egenvärden till  $A$  (2p)  
(b) Bestäm alla egenvektorer till  $A$ . (2p)  
(c) Är  $A$  diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera  $A$ . (2p)

Var god vänd!

5. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . (1p)
- (b) Bestäm det andragradspolynom  $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$  som är bäst anpassat till punkterna  $(-1, 0), (0, -2), (1, -2), (2, 2)$  enligt minstakvadratmetoden. (4p)

## Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt  $\mathbf{v}$  vara vektorn  $\mathbf{v} = [\sqrt{3} \ 1]^t$  i  $\mathbb{R}^2$ , och låt  $L = \text{span}\{\mathbf{v}\}$  vara linjen som spänns upp av  $\mathbf{v}$ .
- (a) Ta fram projektionen av vektorerna  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^t$  och  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^t$  på linjen  $L$ . (2p)
- (b) Om  $\mathbf{p}$  är projektionen av en vektor  $\mathbf{w}$  på  $L$ , så ges speglingen  $\mathbf{s}$  av  $\mathbf{w}$  kring  $L$  av  $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$ . Ta fram speglingen av vektorerna  $\mathbf{e}_1$  och  $\mathbf{e}_2$  kring linjen  $L$ . (1p)
- (c) Låt  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som först speglar en vektor kring linjen  $L$  och sedan speglar kring  $x$ -axeln. Ta fram standardmatrisen för avbildningen  $T$ . (2p)
- (d) Avbildningen  $T$  ovan kan beskrivas som en rotation. Vad är rotationsvinkeln? (2p)
7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)
- (a) Om  $A$  och  $B$  är  $n \times n$ -matriser, och  $B$  är inverterbar, så är  $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$ .
- (b) En  $3 \times 3$  matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).
- (c) En  $3 \times 2$  matris har linjärt oberoende kolonner om och endast om den har linjärt oberoende rader (där raderna betraktas som kolonnvektorer).
8. (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer är en ortogonal mängd och en ortonormal mängd. (2p)
- (b) Bevisa att om  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  är en ortogonal mängd, så är  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  linjärt oberoende. (3p)

Lycka till!  
Johan Karlsson

|            |                                       |                        |       |
|------------|---------------------------------------|------------------------|-------|
| Anonym kod | <b>TMA841 Linjär algebra V 140116</b> | sid.nummer<br><b>1</b> | Poäng |
|------------|---------------------------------------|------------------------|-------|

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm för vilka  $h$  som vektorn  $\mathbf{u} = [2 \quad -3 \quad h]^t$  är en linjärkombination av vektorerna  $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 1]^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^t$ . (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (b) Skriv den allmänna lösningen till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}.$$

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (c) Bestäm volymen av parallelepipeden som spänns upp av vektorerna  $\mathbf{v}_1 = [0 \quad 10 \quad 5]^t$ ,  $\mathbf{v}_2 = [5 \quad 6 \quad 2]^t$  och  $\mathbf{v}_3 = [6 \quad 7 \quad 3]^t$  i  $\mathbb{R}^3$ . (2p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

**Var god vänd!**

- (d) Låt  $\mathcal{B}$  och  $\mathcal{C}$  vara baserna  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$  och  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t$  för  $\mathbb{R}^2$ . Antag att  $\mathbf{v}$  har koordinaterna  $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$  i basen  $\mathcal{B}$ . Bestäm koordinaterna  $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}}$  för  $\mathbf{v}$  i basen  $\mathcal{C}$ . (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

- (e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen  $(2A + X)B^{-1} = I_2$  där  $I_2$  är  $2 \times 2$ -enhetsmatrisen.

**Lösning:**

.....

- (f) Låt  $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , där  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$  och  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}^t$ . Ligger vektorn  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^t$  i  $W$ ? (2p)

**Lösning:**

**Svar:** .....

**Liten ordlista** över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

**Engelskt ord**

adjoint, adjugate  
algorithm  
angle  
augmented matrix  
auxiliary (equation)  
backward (phase)  
basic variable  
basis  
belongs to  
change of basis  
collinear (vectors)  
column  
column space  
composition of linear transformations  
condition  
condition number  
consistent system  
constraint  
dimension  
distinct  
domain  
dot product  
echelon (matrix)  
eigenvalue, eigenvector  
equivalent  
finite (dimensional)  
forward (phase)  
general solution  
homogeneous equation  
identity matrix  
if and only if  
image  
inconsistent (system)  
inner product  
inverse, invertible  
kernel  
least-square (method)

**Svenskt ord**

adjunkt, adjungerad matris  
algoritm, räknescema  
vinkel  
totalmatris, utvidgad matris  
hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation  
bakåt (fas)  
bunden (ofri) variabel, basvariabel, bas  
tillhör  
basbyte  
parallella (vektorer)  
kolonn  
kolonnrum  
sammansatt linjär avbildning  
villkor  
konditionstal  
lösbart system  
restriktion, villkor  
dimension  
distinkta, olika  
definitions mängd  
skalärprodukt  
trappstegs(matris)  
egenvärde, egenvektor  
ekvivalent, likvärdig  
ändligt (dimensionell)  
framåt (fas)  
allmän lösning  
homogen ekvation  
enhets matris, identitets matris  
om och endast om  
bild  
olösbart (system)  
skalärprodukt  
invers, inverterbar  
kärna, nollrum  
minsta-kvadrat(-metoden)

|                        |                                                   |
|------------------------|---------------------------------------------------|
| linear combination     | linjär kombination                                |
| linearly (in)dependent | linjärt (o)beroende                               |
| linear span            | linjärt hölje                                     |
| lower triangular       | undre triangulär                                  |
| mapping                | avbildning, transformation                        |
| necessary (condition)  | nödvändigt (villkor)                              |
| nonsingular (matrix)   | inverterbar (matris), icke-singulär               |
| nontrivial (solution)  | icke-trivial (lösning)                            |
| null space             | nollrum                                           |
| one-to-one             | injektiv (ev. en-entydig)                         |
| onto                   | surjektiv, på                                     |
| orthonormal            | ortonormerad                                      |
| overdetermined system  | överbestämt system                                |
| range                  | värdeområde                                       |
| rank                   | rang                                              |
| reduced echelon matrix | radkanonisk matris, reducerad<br>trappstegsmatris |
| row space              | radrum                                            |
| satisfy                | satisfiera, uppfylla                              |
| set                    | mängd                                             |
| singular               | icke-inverterbar, singulär                        |
| solution               | lösning                                           |
| solution set           | lösningsmängd                                     |
| span, linear span      | (linjärt) hölje                                   |
| spanning set           | mängd som spänner upp,<br>uppspännande mängd      |
| submatrix              | undermatris                                       |
| subspace               | underrum, delrum                                  |
| sufficient condition   | tillräckligt villkor                              |
| trace                  | spår                                              |
| transfer matrix        | överföringsmatris                                 |
| transformation         | transformation, avbildning                        |
| transpose              | transponat                                        |
| underdetermined system | underbestämt system                               |
| unique                 | entydigt bestämd                                  |
| unit vector            | enhetsvektor                                      |
| upper triangular       | övre triangulär                                   |
| vector space           | vektorrum, linjärt rum                            |
| weight                 | vikt                                              |
| zero(vector)           | noll(vektor)                                      |