

TMA841 Linjär algebra V

Lösningar

Del 1: Godkänddelen

1. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{u}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 14 \\ 4 & -4 & a \\ 0 & -3 & -9 \end{array} \right]$$

och reducerar till trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+16 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$\mathbf{u}$ tillhör $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ om och endast om systemet är konsekvent, dvs om och endast om $a = -16$.

SVAR: $a = -16$.

- (b) Totalmatrisen som svarar mot ekvationssystemet är:

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 2 & b_1 \\ 5 & 5 & 0 & b_2 \\ -1 & 3 & -4 & b_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} -1 & 3 & -4 & b_3 \\ 0 & -10 & 10 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right].$$

SVAR: Om $2b_1 + b_2 + b_3$ inte är lika med 0 finns ingen lösning. Om $2b_1 + b_2 + b_3 = 0$ finns oändligt många lösningar. Det finns aldrig unik lösning.

- (c)

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 14 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cc} 14 & 4 \\ 9 & -1 \end{array} \right| = 50.$$

SVAR: $\det(A) = 50$.

(d) Per definition av koordinatvektor har vi att

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{b}_1 - 2 \cdot \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sedan söker vi ett par linjärt oberoende vektorer $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ sådan att

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{c}_1 - 3 \cdot \mathbf{c}_2.$$

Valet är inte unikt, men det funkar t.ex. med

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sedan har vi

$${}_C P_B = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2]^{-1} [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{9}{2} \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

(e)

$$2A + XB = X \Rightarrow XB - X = -2A \Rightarrow X(B - I_2) = -2A \Rightarrow X = -2A(B - I_2)^{-1}.$$

Nu räknar vi

$$-2A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(f) \quad T(\mathbf{e}_2) = \frac{T(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_1)}{-2} = \frac{(0,1) - (1,-2)}{-2} = (1/2, -3/2)$$

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{SVAR: } \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

2. Lösningen är inte unik men kan tex konstrueras på följande sätt.

Låt a_i beteckna kolumn i ur A.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Välj sedan a_4 och a_5 så att den givna vektorn ligger i nollrummet som önskat, dvs så att

$$-a_1 - 5a_2 - 3a_3 + 3a_4 + a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Till exempel: } a_4 = a_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, a_5 = a_1 + 5a_2 = \begin{bmatrix} -36 \\ 6 \\ 29 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Eftersom kolumnerna i A är konstruerade som linjärkombinationer av de givna basvektorerna så ligger kolumnrummet till matrisen i spannet av de givna basvektorerna. Eftersom alla basvektorerna också finns med som kolumn 1 till 3 så ligger spannet av basvektorerna i kolumnrummet. Spannet av basvektorerna är alltså kolumnrummet.

3. (a) Först byter vi ut $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ mot en ortogonalbas via Gram-Schmidt processen. Tag $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ och

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{-1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

För att underlätta väljer vi $\mathbf{w}_2 = [1 \ 1 \ 2 \ 0]^T$. Normalisering ger sedan en ON-bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ med

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Kalla $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för V . Vi har

$$\text{Proj}_V \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \right) \mathbf{w}_2 = \left(\frac{-1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{9}{6} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (c)

$$\text{Avståndet} = \|\mathbf{u} - \text{Proj}_V \mathbf{u}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = 4.$$

4. (a) Det karakteristiska polynomet p är:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5 - \lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \{ \text{utveckling längs 3:e kolumnen} \} = \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ -3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Eigenvärdena är rötterna till det karakteristiska polynomet, dvs, $\lambda = 1$ och $\lambda = -2$.

SVAR: Eigenvärdena till A är 1 och -2 .

- (b) Först tar vi $\lambda = 1$.

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variablerna x_2 och x_3 är fria och $x_1 = -2x_2$. Så den allmänna lösningen i parametrisk vektorform är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så $V_1 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 1 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Sedan tar vi $\lambda = -2$.

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variabeln x_3 är fri, $x_2 = x_3$, $x_1 = -x_3$ och den allmänna lösningen i parametrisk vektorform är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så $V_{-2} = \text{Span}\{\mathbf{v}_3\}$ där $\mathbf{v}_3 = [-1 \ 1 \ 1]^T$.

- (c) Det följer direkt från (a) och (b) att $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Del 2: Överbetygsdelen

$$5. \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad X^T X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}, \quad X^T y = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 10 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & 34 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -5/14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = -\frac{2}{7} - \frac{3}{10}x - \frac{5}{14}x^2$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \\ 2/7 \end{bmatrix} + \frac{3}{10} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{14} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 8 \\ -46 \\ 90 \\ -74 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Största avståndet är alltså $9/7$.

6. (a) Falskt. Man kan multiplicera ut VL m.h.a. den distributiva lagen och den blir $A^2 + AB + BA + B^2$. Så VL = HL om och endast om $AB = BA$, och vi vet ju att detta inte alltid gäller (matrismultiplikation är ej kommutativ). För ett specifikt exempel tag, säg, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (b) Falskt. Att en matris A är radekvivalent med enhetsmatrisen innebär att den är inverterbar. Men en inverterbar matris behöver inte vara diagonaliserbar. Det enklaste motexemplet är kanske $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (c) Sant. Låt $\mathbf{u} = [a \ b]^T$, $\mathbf{v} = [c \ d]^T$. Då är

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{bmatrix}.$$

Om $a = b = 0$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, en motsägelse. Om $a = 0$ men $b \neq 0$, så är översta raden $[0 \ 0]$, medan att den nedersta raden är inte det för $c = d = 0$ skulle innebära att $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, också en motsägelse. Så i detta fall har vi en nollskild rad och $\text{rang}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1$. Ett liknande argument gäller om $a \neq 0$ och $b = 0$. Slutligen, om varken a eller b är noll, så är rad 2 en multipel av rad 1, och rangen är fortsatt lika med 1, ty $[c \ d] \neq [0 \ 0]$ så ingen rad är noll.

7. (a) En kvadratisk matris P sägs vara en *ortogonalmatris* om $P^T = P^{-1}$. Ett exempel är $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, där $\theta \in \mathbb{R}$.

- (b)

$$\|U\mathbf{x}\|^2 = (U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{x}) = (U\mathbf{x})^T (U\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T U^T) (U\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (U^T U) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T I \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

- (c) Similära matriser har samma karakteristiska polynom och därmed samma egenvärden. Se Theorem 5.2.4 i Lay.