**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 150318 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Frida Svelander 0703-088304

# TMA841 Linjär algebra V

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från kryssuppgifter 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

**2.** (a) Bestäm en bas $B$ så att spegling i planet $x + 2y - 2z = 0$ definieras av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med (3p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

för vektorer $\mathbf{x}$ uttryckta i basen $B$.

(b) Beräkna sedan matrisen $C$ för spegling i planet för vektorer uttryckta i standardbasen med hjälp av $A$ och basbytesmatrisen $P_B$ för byte från $B$ till standardbasen. (3p)

**3.** (a) Definiera vad som menas med *nollrummet* till en $m \times n$ matris $A$. (1p)

(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

Bestäm en ortogonal bas till $\mathrm{Nul}(A)$. (4p)

(c) Bestäm rangen av $A$. (1p)

**4.** (a) Bestäm den linjära transformationen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ som deformerar tetraedern med hörn (4p)

$$(0,0,0), (0,1,0), (1/2,1,0), (0,0,2)$$

till tetraedern med motsvarande hörn

$$(0,0,0), (0,2,0), (3,4,0), (2,2,4)$$

(b) Antag att $B$ är ett sammanhängande område i rummet av okänd form men med volym $\pi$. Vad blir volymen av området efter att det deformerats med $T(\mathbf{x})$? (2p)

**Var god vänd!**

## Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**5**. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (12p)

(a) Ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende

(b) Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en rotation omkring origo i planet då är matrisen $A$ ortogonal

(c) Om $A$ är en ortogonal $2 \times 2$ matris så är $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en rotation omkring origo i planet

(d) Låt $A, B$ vara $n \times n$ matriser. Om $\lambda$ är ett egenvärde till $A$ och $\mu$ ett egenvärde till $B$ då är $\mu\lambda$ ett egenvärde till $AB$

(e) Definition: En kvadratisk matris $M$ definieras som nilpotent om $M^k = 0$ för något positivt heltal $k$. Påstående: $\lambda = 0$ är alltid ett egenvärde för alla nilpotenta matriser

(f) Determinanten av en diagonaliserbar matris är lika med produkten av egenvärdena till matrisen

**6**. Spåret (*Trace* på engelska) av en $n \times n$ matris $A$ med element $a_{ij}$ defineras av

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

d.v.s, $\mathrm{Tr}(A)$ är summan av diagonala elementen i matrisen $A$.

(a) Visa att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, for alla $n \times n$ matriser $A$, $B$ (3p)

(b) Använd (a) för att visa att $\mathrm{Tr}(A)$ är lika med summan av egenvärdena till $A$ när $A$ är diagonaliserbar. (3p)

Lycka till!

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka värden av $h \in \mathbb{R}$ är vektorerna linjärt oberoende? (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} h & -2 & -3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & h & 6 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(b) Visa att matrisen $A$ är ortogonal (2p)

$$A = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(c) Beräkna om möjligt inversen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

**Var god vänd!**

(d) Lös systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $A$ är matrisen i uppgiften (b) (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(e) Bestäm den räta linjen som, enligt minstkvadratmetoden, bäst ansluter till punkterna (2p)

$$(-1,-1), \quad (0,1), \quad (2,3), \quad (3,5).$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(f) För vilka värden av $a, b \in \mathbb{R}$ är matrisen $A$ diagonaliserbar? (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

**Lösningar TMA841 Linjär algebra V 150318**

**1**. (a) Om $h = 0$ blir matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

dvs pivotelement i varje kolumn och därmed linjärt oberoende. Om $h \neq 0$ blir det

$$\begin{bmatrix} h & 0 & -2 \\ -2 & h & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} h & 0 & -2 \\ 0 & h & -1-4/h \\ 0 & 0 & 1+24/h^2 \end{bmatrix},$$

dvs pivotelement i varje kolumn, dvs linjärt oberoende för alla reella $h$.

(b)

$$AA^T = \frac{1}{11}\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(e) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad X^TX = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$ $\quad X^Ty = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 14 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 7/5 \end{bmatrix}$$

dvs linjen blir $y = 3/5 + 7/5x$.

(f) Egenvärden kan läsas av som diagonalelement i triangulära matriser, dvs 1 är ett egenvärde med multiplicitet 2 och 2 är ett egenvärde med multiplicitet 2. Båda egenvektorsrummen måste ha dimension 2 för diagonaliserbarhet.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & a-4b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För att få två kolumner utan pivotelement måste $a - 4b = 0$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För att få två kolumner utan pivotelement måste $b = 0$. Alltså måste även $a = 0$.

**2**. (a) Normalen till planet blir $n = (1, 2, -2)$. Tag sedan en vektor ortogonal mot normalen, dvs liggande i planet, tex $v = (0, 1, 1)$, och sedan en till vektor ortogonal mot normalen och inte en multipel av $v$, tex $u = (-2, 1, 0)$. Dessa vektorer blir en bas $B = \{n, v, u\}$ i vilken spegling uttrycks med den givna matrisen.

(b)

$$P_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = P_B A P_B^{-1}$$

**3**. (a) Nollrummet till $A$ är mängden av alla vektorer $x$ som uppfyller $Ax = 0$.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollrummet utgörs av alla vektorer av formen

$$\begin{bmatrix} -s \\ (-s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

med $s$ och $t$ godtyckliga reella tal, vilket till exempel ger basvektorerna $b_1 = (-1, -1/2, 1, 0)$ och $b_2 = (0, 1/2, 0, 1)$ som inte är ortogonala. Skapa ortogonal bas med Gram-Schmidt. $v_1 = b_1$ $v_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (0, 1/2, 0, 1) - (-1/4)/(9/4)(-1, -1/2, 1, 0) = (-1/9, 4/9, 1/9, 1)$

(c) $Rang(A) = 4 - dim(Nul(A)) = 4 - 2 = 2$

**4.** (a)

$$T(e_2) = (0,2,0)$$
$$T(2e_3) = (2,2,4)$$
$$T(e_3) = (1,1,2)$$
$$T(1/2e_1 + e_2) = (3,4,0)$$
$$T(e_1) = (6,4,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $det(A) = 24$ vilket innebär att volymen efter deformation blir $24\pi$.

**5.** (a) Sant. Se Theorem 4 i 6.2 i Lay.

(b) Sant. $A = \begin{bmatrix} con(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

och $A^T A = I$ eftersom
$-sin(\theta)cos(\theta) + sin(\theta)cos(\theta) = 0$
$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

(c) Falskt. Motexempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A$ är ortogonal men inte en rotation, utan en spegling i x-axeln.

(d) Falskt. Motexempel:

$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ dvs egenvärdena 1 och -1.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dvs bara egenvärdet 1. Alltså tex: 1 egenvärde till A, -1 egenvärde till B, men 1*(-1)=-1 inte egenvärde till AB.

(e) Antag att $v$ är en egenvektor till $M$. Då gäller att $\lambda^k v = M^k v = 0v = 0$ och $v$ är inte 0, alltså måste $\lambda = 0$.

(f) Sant. $det(A) = det(PDP^{-1}) = det(P)det(D)det(P^{-1}) = det(D) = \prod_i \lambda_i$

**6.** (a) Beteckna elementet på rad $i$ kolumn $j$ i matrisen $M$ med $m_{ij}$. Beteckna rad $i$ ur en matris $M$ med $M_i^{rad}$ och kolumn $i$ ur en matris $M$ med $M_i^{col}$.

$$Tr(AB) = \sum_i (A_i^{rad}) \cdot (B_i^{col}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (B_j^{rad}) \cdot (A_j^{col}) = Tr(BA)$$

(b)

$$Tr(A) = Tr(PDP^{-1}) = Tr(PP^{-1}D) = Tr(D) = \sum \lambda_i$$