

TMV184 Linjär algebra V, vt 15

Vecko-PM läsvecka 2

Kapitel 2 Matrisalgebra

I kapitel 1 studerade vi först linjära ekvationssystem och införde då två matriser. Dels systemets koefficientmatris, dels den utvidgade matrisen (eller totalmatrisen) där också högerleden inkluderas. Koefficientmatrisen kan också uppfattas som matrisen till en linjär avbildning. Det är detta synsätt som ligger till grund för behovet av andra räkneoperationer än multiplikationen $A\mathbf{x}$. Matrisaddition, $A + B$, motsvarar addition av linjära avbildningar. Matrismultiplikation AB motsvarar sammansättning av avbildningar. Matrisinvers motsvarar inversen till avbildningen.

I **2.1** definieras operationerna, räknelagar formuleras och härleds. Du skall behärska både definitionen av matrismultiplikation och rad-kolonn regeln för beräkning av produkten. Matristransponering kan inte motiveras enkelt med en operation på en avbildning men är ändå viktigt. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är kolonnvektorer är $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ skalärprodukten av vektorerna.

"Smygvägen" införs diverse praktiska beteckningar: $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ betyder att $\mathbf{a}_1$ är den vektor man får av första kolonnen i A , $A = [a_{ij}]$ innebär att elementen i A betecknas a_{ij} . Märk att man använder dubbelindex, i är radindex, j är kolonnindex. Elementet a_{11} står i rad 1 och kolonn 1, $a_{13,17}$ står i rad 13 kolonn 17.

För att "plocka ut" element ur en matris kan man skriva $(A)_{ij}$, eller $[A]_{ij}$. $(A)_{25}$ är alltså elementet på rad 2, kolonn 5 i matrisen A . Hela kolonner eller rader kan man beteckna $\text{col}_j(A)$ respektive $\text{row}_i(A)$.

I **2.2** definieras begreppet *inverterbar* matris. Ett användbart begrepp, men tänk på att det kräver mer kalkyl att lösa ett ekvationssystem med matrisinvers än genom eliminering.

Sats 8 i avsnitt **2.3** är viktig då den kopplar samman begreppet inverterbar matris med de olika sätten att tänka om ekvationssystem, vektorekvationer och matrisekvationer.

I **2.4** undersöks hur matrisoperationerna fungerar om matriserna är uppbyggda av mindre delmatriser, block. Detta är relativt vanligt i tillämpningar och kan enkelt hanteras i t.ex. Matlab. Viktigt är att om två matriser har blockindelning som gör operationerna möjlig så kan addition och multiplikation beräknas *som om blocken vore skalärer*. Blocken adderas eller multipliceras sedan som fristående matriser.

LU-faktoriseringen i avsnitt **2.5** handlar om att lagra operationerna som leder till trappstegsformen av ett ekvationssystem koefficientmatris. Matrisen L innehåller operationerna, U är trappstegsformen. Exempel 2 illustrerar utmärkt hur det går till att skapa L i ett enkelt fall. Det är en god idé att gå tillbaka till **2.2** och läsa det mer detaljerade avsnittet om elementära matriser.

Centrala begrepp i avsnitt **2.8-2.9** är *underrum*, *bas för underrum*, *dimension* och *rang*, som preciserar en del av det vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är origo, linjer genom origo, plan genom origo, och hela $\mathbb{R}^3$. Dessa har dimension 0, 1, 2 respektive 3. En bas för linjen består av en vektor som spänner upp linjen, en bas för ett plan består av två vektorer som spänner upp planet. Särskilt viktiga underrum i $\mathbb{R}^n$ är nollrum och kolonnrum till matriser. Nollrummet är lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kolonnrummet är mängden av alla $\mathbf{b}$ för vilka ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar.

Matrisrang, som är dimensionen för kolonnrummet, eller antalet pivotelement i matrisen, är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. Rangsatsen beskriver sambandet mellan dimensioner för nollrum och kolonnrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Vi talar om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer*, vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 2.8.13 beskriver hur man gör.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
2.1	addera matriser
2.1	multiplicera matriser
2.1	ge exempel som visar att (a) matrismultiplikationen inte är kommutativ. (b) annulleringslagen <i>inte</i> gäller, man kan alltså inte "förkorta": $AB = AC \nRightarrow B = C$. (c) en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
2.1	transponera matriser
2.1	utnyttja räkneregler i sats 2.1.3 vid beräkningar
2.2	beräkna matrisinvers
2.2	tillämpa sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
2.3	tillämpa sats 2.3.8 i problemlösning
2.5	bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.
2.8	definiera begreppet underrum i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8	definiera begreppet <i>bas</i> för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.8	definiera begreppet <i>nollrum</i> , $\text{Nul}(A)$, till en matris A ,
2.8	definiera begreppet <i>kolonnrum</i> , $\text{Col}(A)$, till en matris A ,
2.9	definiera begreppet <i>koordinater för en vektor relativt en bas</i> och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
2.9	definiera begreppet <i>dimension</i> av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
2.9	definiera begreppet <i>rang</i> för en matris och bestämma rangen för en matris.
2.9	tillämpa <i>Rang-satsen</i> vid problemlösning
2.9	tillämpa <i>Satsen om inverterbara matriser</i> (<i>The invertible Matrix Theorem</i>) vid problemlösning

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
2.1	bevisa att $A(BC) = (AB)C$.
2.2	definiera begreppet inverterbar matris
2.2	förklara varför metoden i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.
2.3	bevisa sats 2.3.8.
2.8	bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$
2.9	formulera och bevisa <i>Rang-satsen</i> .

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
2.1	PP, 1, 3, 5, 7	9, 15, 16, 25	21, 22, 23, 26
2.2	PP, 1, 5	7, 9, 10, 13, 18, 31, 32	15, 21, 23, 33, 35
2.3	PP, 1, 3	11, 12, 13	17, 21, 23
2.4	PP, 1, 5	25	
2.5	PP, 1, 7, 9	15	
2.8	PP, 1, 3, 7, 9, 15-20, 23, 25	21, 22	27, 31
2.9	PP, 1, 5, 7, 11, 13	15, 17, 18	19 - 27