

TMA184 Linjär algebra V, vt 15

Vecko-PM läsvecka 6

Lay: 6 Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden

I kapitel **6.1** införs *skalärprodukt* (dot product) och *längd*, eller *norm*. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. *Ortogonal komplementet* till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt **6.2** är begreppen *ortogonal bas* och *ortonormerad bas* (eller ON-bas) viktiga. Många räkningar förenklas betydligt om man arbetar i en ortogonal bas. Exempelvis visar sats 6.2.5 hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Begreppet *ortogonal matris* som införs i slutet av 6.2 kommer att användas i kapitel 7.

I **6.4** ges Gram–Schmidt-processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W . Idén är enkel, det gäller att i varje steg ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt **6.5** ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning*. I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna “lösning” till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av $\mathbf{x} = A \backslash \mathbf{b}$. Sats 6.5.13 ger metoden. I sats 6.5.14 är det viktigt att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 6.5.13 entydig lösning. I avsnitt **6.6** tillämpas metoden på anpassning av en kurva till mätpunkter, se även datorlab 4.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
6.1	beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
6.1	avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
6.1	bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
6.1	förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
6.1	tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
6.2	förklara vad som menas med <i>ortogonal bas</i> för ett underrum W och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W .
6.2	använda projektionsformeln 6.2(2) i problemlösning
6.2	förklara vad som menas med <i>ortonormerad bas</i> för ett underrum W .
6.2	förklara vad som menas med en ortogonal matris.
6.3	tillämpa sats 6.3.8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ då en ortogonal bas för W är känd.
6.4	tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ utgående från en annan bas för W .
6.5	förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning
6.6	tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
6.1	bevisa sats 6.1.3.
6.2	bevisa sats 6.2.4: en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
6.2	bevisa sats 6.2.7 då U är en ortogonal matris.
6.4	förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
6.5	förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
6.1	PP, 1, 6, 8, 11, 13, 15	17, 19, 24, 26	28, 29, 30
6.2	PP, 3, 5, 9, 11	17, 21, 23, 27	29, 33
6.3	PP, 1, 3, 5	9, 11, 15, 21	23
6.4	PP, 1, 5	3, 9, 11, 17ab	22
6.5	PP, 3, 5, 7	9, 13, 17	19
6.6	PP, 1, 4	7, 10	15, 16