Matematik och optioner (CTH&GU), lp3-lp4, 97/98

INLÄMNINGSUPPGIFT 2

1. Antag att X är en binomialfördelad stokastisk variabel sådan att
$$P[X=-1]=P[X=1]=\frac{1}{2}.$$
Bestäm de $\lambda \in \mathbf{R}$ för vilka olikheten
$$E\left[(a+\lambda bX)^4\right] \le (E\left[(a+bX)^2\right])^2$$
gäller för alla a, $b \in \mathbf{R}$.

2. Antag $X \in N(\alpha, \sigma^2)$. Beräkna
$$E\left[\max(0, K-e^X)\right]$$
för varje $K > 0$.

3. Antag x_1, x_2, x_3 och r är reella tal och $x_1 < x_2 < x_3$. Betrakta en modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie och en obligation där tiden t är lika med 0 eller 1. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden t betecknas med $B(t)$. Det gäller att
$$S(1) = S(0)e^X$$
där $S(0)$ är en positiv konstant och där $X\colon\ \Omega \to \{x_1, x_2, x_3\}$ är en stokastisk varibel sådan att $P[X = x_k] > 0$, $k = 1, 2, 3$. Vidare gäller att
$$B(1) = B(0)e^r$$
där $B(0)$ är en positiv konstant. Begreppet arbitrage definieras analogt med motsvarande begrepp i samband med binomialmodellen.

a) Under vilka villkor på parametrarna x_1, x_2, x_3 och r saknar modellen arbitrage?

b) Antag $x_1 < r < x_3$ och representera X som identitetsavbildningen i mängden $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. Visa att det finns flera martingalmått dvs sannolikhetsmått i Ω sådana att

$$S(0) = e^{-r} E^Q [S(1)] .$$

Ge också exempel på ett derivat av europeisk typ som slutdagen 1 utbetalar beloppet $f(S(1))$ och som har egenskapen att

$$f(S(1)) \neq h_S S(1) + h_B B(1)$$

för alla reella h_B och h_S (man säger därför att modellen ej är komplett). (Ledning: Om U och V är reellvärda stokastiska variabler så betyder relationen $U \neq V$ att $P[U = V] < 1$.)